

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2012 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選初賽
個人賽試題

編號: _____ 校名: _____ 縣(市) _____ 國中 姓名: _____
性別: ☐ 男 ☐ 女

作答時間: 二小時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

1. 如果將 7^{2012} 除以 100, 則餘數為 1。

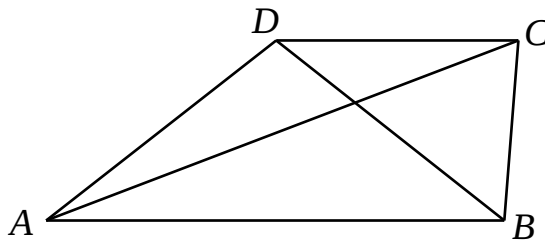
【解】

可知 $7^1 \equiv 7 \pmod{100}$ 、 $7^2 \equiv 49 \pmod{100}$ 、 $7^3 \equiv 43 \pmod{100}$ 、 $7^4 \equiv 1 \pmod{100}$ 、 $7^5 \equiv 7 \pmod{100}$, 故可判斷出數列 $\{7^n \pmod{100}\}$ 為一個以 7、49、43、1 這 4 個數為週期, 依序循環出現的數列。

因 2012 為 4 的倍數, 故 $7^{2012} \equiv 7^4 \equiv 1 \pmod{100}$ 。

答: 1

2. 下圖中, $ABCD$ 為一梯形, $DC \parallel AB$ 、 $AD = BD$ 、 $\angle BDC = 50^\circ$ 、 $\angle CBD = 30^\circ$ 、 $\angle ACB = 70^\circ$, 則 $\angle CAD =$ 20° 。



【解】

由 $DC \parallel AB$ 可知 $\angle DBA = \angle BDC = 50^\circ$; 再由 $AD = BD$ 可知 $\angle DBA = \angle DAB = 50^\circ$; 而 $\angle DCB = 180^\circ - \angle CBD - \angle BDC = 100^\circ$, 故 $\angle DCA = 100^\circ - \angle ACB = 30^\circ$, 再由 $DC \parallel AB$ 可知 $\angle CAD = \angle DAB - \angle CAB = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$ 。

答: 20°

3. 設 x 為整數, 若 $y = \frac{7x+18}{2x+3}$ 也是整數, 則所有可能的 y 值之和為 28。

【解】

由 $y = \frac{7x+18}{2x+3} = 3 + \frac{x+9}{2x+3} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{15}{2(2x+3)}$ 也是整數知 $2x+3$ 必為 15 的因數:

(1) $2x+3=15$, 即 $x=6$ 、 $y=3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$;

(2) $2x+3=5$, 即 $x=1$ 、 $y=3+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=5$;

(3) $2x+3=3$ ，即 $x=0$ 、 $y=3+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=6$ ；

(4) $2x+3=1$ ，即 $x=-1$ 、 $y=3+\frac{1}{2}+\frac{15}{2}=11$ ；

(5) $2x+3=-1$ ，即 $x=-2$ 、 $y=3+\frac{1}{2}-\frac{15}{2}=-4$ ；

(6) $2x+3=-3$ ，即 $x=-3$ 、 $y=3+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=1$ ；

(7) $2x+3=-5$ ，即 $x=-4$ 、 $y=3+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=2$ ；

(8) $2x+3=-15$ ，即 $x=-9$ 、 $y=3+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=3$ ；

故所求為 $4+5+6+11-4+1+2+3=28$ 。

答：28

4. 已知數列 b_1 、 b_2 、 b_3 、 $\cdots$ 滿足 $b_{n+2} = \frac{b_{n+1}+1}{b_n}$ ，其中 $n \geq 1$ ，若 $b_1=2$ 且 $b_2=5$ ，

則 b_{2012} 的值為 5。

【解】

由 $b_1=2$ 且 $b_2=5$ 可知 $b_3 = \frac{5+1}{2} = 3$ 、 $b_4 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$ 、 $b_5 = \frac{\frac{4}{5}+1}{3} = \frac{3}{5}$ 、

$b_6 = \frac{\frac{3}{5}+1}{\frac{4}{5}} = 2$ 、 $b_7 = \frac{2+1}{\frac{3}{5}} = 5$ ，故可得知此為一個以 2 、 5 、 3 、 $\frac{4}{5}$ 、 $\frac{3}{5}$ 為週期，依

序循環出現的數列。因 $2012=5 \times 402+2$ ，故 $b_{2012} = b_2 = 5$ 。

答：5

5. A 、 B 、 C 、 D 是某犯罪案件的 4 個嫌疑犯，警方已掌握並確定以下事實：

- (1) 他們之中至少有一人犯罪；
- (2) 除上述 4 個嫌疑犯，沒有其他人參與該犯罪案件；
- (3) A 沒有犯罪；
- (4) 若 C 犯罪，則他僅有一個同謀共犯；
- (5) 若 B 犯罪，則他僅有兩個同謀共犯。

則可確定犯罪的人是 D。

【解】

若 B 犯罪，則由(3)、(5)知 C 、 D 必為同謀犯罪，此時與(4)矛盾，故 B 沒犯罪；

若 C 犯罪，則由(3)、(4)、(5)知 D 必為同謀犯罪，符合題意；

若 C 沒犯罪，則由(1)知 D 必為犯罪，符合題意；

故可確定 D 必定犯罪， A 、 B 必沒有犯罪而 C 則無法確定是否犯罪。

答：D

6. 已知 $ABCD$ 為一梯形，其中 $AB \parallel CD$ 且 $AB > DC$ ， M 及 N 分別為 AC 及 BD 的中點，若 $AB=30$ ， $MN=6$ ，則 $CD=$ 18。

【解】

如圖，令 O 為 AC 、 BD 交點。

因 M 及 N 分別為 AC 及 BD 的中點，

故知 $MN \parallel AB \parallel CD$ ，

因此 $OM : OB = MN : AB = 6 : 30 = 1 : 5$ 。

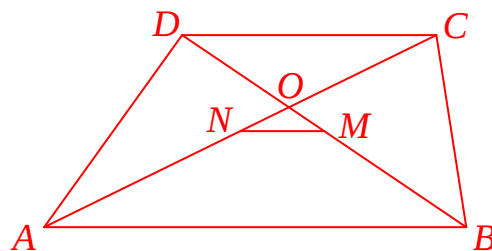
此時可令 $OM=a$ ，則 $OB=5a$ ，即 $MB=4a$ 。

因 M 為 BD 中點，故 $MD=MB=4a$ ，

則可得知 $OD=3a$ 。

因 $MN \parallel CD$ ，所以 $CD : MN = OD : OM = 3a : a = 3 : 1$ 。因 $MN=6$ ，所以 $CD=18$ 。

答：18



7. 已知 $\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\angle CAB=90^\circ$ 、 $AB=24$ 、 $AC=32$ ，將此三角形摺起來，使得頂點 B 和 C 重合，則摺痕 DE 之長為 15。

【解】

可知 $BC = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ ，且 D 為 BC 中點。

連接 BE 並令 AE 長度為 a ，則由 DE 為 BC 中垂線

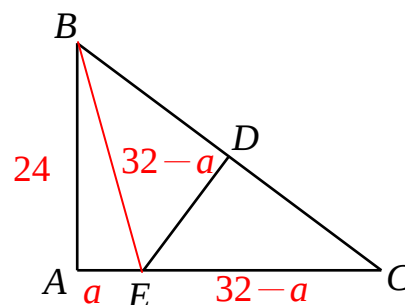
知 $BE=CE=32-a$ ，則利用畢氏定理可得知：

$$(32-a)^2 = a^2 + 24^2$$

$$64a = 448$$

$$a = 7$$

故知 $DE = \sqrt{(32-7)^2 - 20^2} = 15$ 。



答：15

8. 圖中 $ABCD$ 為一正方形， $EC=7$ 、 $AE=13$ ，則正方形 $ABCD$ 的面積=144。

【解】

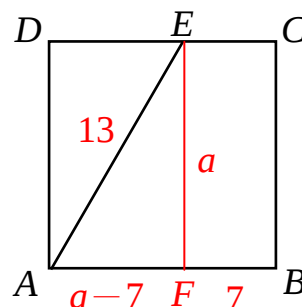
如圖，過 E 點作垂線 EF 交 AB 於 F 點，並令正方形邊長為 a ，則利用畢氏定理可得知：

$$13^2 = a^2 + (a-7)^2 = 2a^2 - 14a + 49$$

$$0 = a^2 - 7a - 60$$

$$0 = (a-12)(a+5)$$

因 a 不可能為負數，故知 $a=12$ ，即正方形 $ABCD$ 的面積為 144。



答：144

9. 從 0、2、4、6、8 五個數碼中取出三個相異數組成有序三元組 (a, b, c) ，使得一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 有實數根，其中 $a \neq 0$ ，則這樣的有序三元組 (a, b, c) 共有 18 組。

【解】

可知判別式 $b^2 - 4ac$ 需為正數，故：

(1) 若 $ac=0$ ，即 $c=0$ 時，則判別式 b^2 即為正數，故共有 $4 \times 3 = 12$ 組；

(2) 若 $ac \neq 0$ ，則可知 $ac \geq 2 \times 4 = 8$ ，即 $4ac \geq 32$ ，故 $b^2 \geq 32$ ，因此 $b=6$ 或 8 ：

若 $b=8$ ，則知 $b^2 - 4ac = 64 - 4ac > 0$ ，即 $8 \leq ac < 16$ ，故可取 $(a, c) = (2, 6)$ 、 $(6, 2)$ 、 $(2, 4)$ 或 $(4, 2)$ 共四組解；

若 $b=6$ ，則知 $b^2 - 4ac = 36 - 4ac > 0$ ，即 $8 \leq ac < 9$ ，故可取 $(a, c) = (2, 4)$ 或 $(4, 2)$ 共二組解。

因此共 $12 + 4 + 2 = 18$ 組解。

答：18 組

10. 已知 a 、 b 、 c 為整數，其中 $b \neq 0$ ，若 $a - b + c = 11$ 且 $b^2 = ac$ ，則滿足這些條件的 a 最大值為 11。

【解】

由算幾不等式可知 $a + c \geq 2\sqrt{ac}$ ，故：

若 $b > 0$ ，則有 $11 + b \geq 2b$ ，即 $0 < b \leq 11$ ；

若 $b < 0$ ，則有 $11 + b \geq -2b$ ，即 $-\frac{11}{3} \leq b < 0$ 。

因此可得知 b 的取值為 -3 、 -2 、 -1 、 1 、 2 、 3 、 4 、 5 、 6 、 7 、 8 、 9 、 10 或 11 。

此時可造表如下：

$a + c = 11 + b$	8	9	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$ac = b^2$	9	4	1	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121

其中僅 $a + c = 22$ 、 $ac = 121$ 有整數解，故知 $a = b = c = 11$ 。

答：11

11. 小於 500 的正整數中，其數碼之和為 6 的共有 25 個。

【解一】

可將一位數 a 視為 $\overline{00a}$ 的三位數、二位數 $\overline{bc}$ 視為 $\overline{0bc}$ 的三位數，則可利用把 6 寫成數碼之和的方式來加以考慮。

(1) $6 = 6 + 0 + 0$ ，此情形共有三個數碼和為 6 的三位數：600、060、006，但須排除不合題意的 600，故共有 2 個；

(2) $6 = 5 + 1 + 0$ ，此情形共有 6 個數碼和為 6 的三位數，但須排除不合題意的 510、501，故共有 4 個；

(3) $6 = 4 + 2 + 0$ ，此情形共有 6 個數碼和為 6 的三位數；

(4) $6 = 4 + 1 + 1$ ，此情形共有 3 個數碼和為 6 的三位數；

(5) $6 = 3 + 2 + 1$ ，此情形共有 6 個數碼和為 6 的三位數；

(6) $6 = 3 + 3 + 0$ ，此情形共有 3 個數碼和為 6 的三位數；

(7) $6 = 2 + 2 + 2$ ，此情形共有 1 個數碼和為 6 的三位數；

故所求共有 $2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 3 + 1 = 25$ 個。

【解二】

設 N 為數碼和為 6 且小於 500 的正整數。

若 N 為一位數，則 N 僅可能為 6，因此 N 的可能值共有 1 個；

若 N 為二位數，由 $6+0=1+5=2+4=3+3$ 知 N 的可能值共有 $1+1\times 2+1\times 2+1=6$ 個；

若 N 為三位數且百位數為 1，由 $5+0=1+4=2+3$ 知 N 的可能值共有 $1\times 2+1\times 2+1\times 2=6$ 個；

若 N 為三位數且百位數為 2，由 $4+0=1+3=2+2$ 知 N 的可能值共有 $1\times 2+1\times 2+1=5$ 個；

若 N 為三位數且百位數為 3，由 $3+0=1+2$ 知 N 的可能值共有 $1\times 2+1\times 2=4$ 個；

若 N 為三位數且百位數為 4，由 $2+0=1+1$ 知 N 的可能值共有 $1\times 2+1=3$ 個；

故所求共有 $1+6+6+5+4+3=25$ 個。

答：25 個

12. 已知 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\frac{n+2}{2}\right)^3$ ，則

$$\frac{1}{8a_1-7} + \frac{1}{8a_4-7} + \frac{1}{8a_7-7} + \cdots + \frac{1}{8a_{100}-7} = \frac{34}{309}。$$

【解】

$$a_n = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = \left(\frac{n+2}{2}\right)^3 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^3 = \frac{3n^2 + 9n + 7}{8}$$

$$\text{故 } \frac{1}{8a_{3k+1}-7} = \frac{1}{3(3k+1)^2 + 9(3k+1)} = \frac{1}{3(3k+1)(3(k+1)+1)} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3(k+1)+1} \right)，$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{8a_1-7} + \frac{1}{8a_4-7} + \frac{1}{8a_7-7} + \cdots + \frac{1}{8a_{100}-7} &= \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{103} \right) \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{102}{103} \\ &= \frac{34}{309} \end{aligned}$$

答： $\frac{34}{309}$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 p 為正質數，試求所有可能的 p 值使二次方程式 $x^2 - 5x = 3p^2 + p + 24$ 有正整數解。

【解】

若 p 為偶質數 2，則二次方程式為 $x^2 - 5x - 38 = 0$ ，此方程無整數解，故不合，因此 p 為奇質數。

可知該二次方程式的判別式須為一個完全平方數，故令

$$K^2 = 5^2 + 4(3p^2 + p + 24) = 12p^2 + 4p + 121,$$

即 $4p(3p+1) = (K+11)(K-11)$ ，故知 p 整除 $K+11$ 或 $K-11$ ，因此存在正整數 a 使得 $K = pa+11$ 或 $K = pa-11$ 。

若 $K = pa+11$ ，則知 $4p(3p+1) = (pa+22)pa$ ，即 $(12-a^2)p = 2(11a-2)$ ，故可得知 $2|(12-a^2)$ ，因此 $a=2$ 、 $p=5$ ，此時二次方程式為 $x^2-5x-104=0$ ，二根為 13、-8，滿足題意；

若 $K = pa-11$ ，則知 $4p(3p+1) = pa(pa-22)$ ，即 $(a^2-12)p = 2(11a+2)$ ，故可知 $2|(a^2-12)$ ，因此 a 為大於 2 的偶數。再令 $a=2b$ ，其中 $b \geq 2$ ，則有

$$(b^2-3)p = 11b+1, \text{ 即 } p = \frac{11b+1}{b^2-3} \geq 3. \text{ 可知}$$

$$11b+1 > 3b^2-9 \Rightarrow 10 > b(3b-11)$$

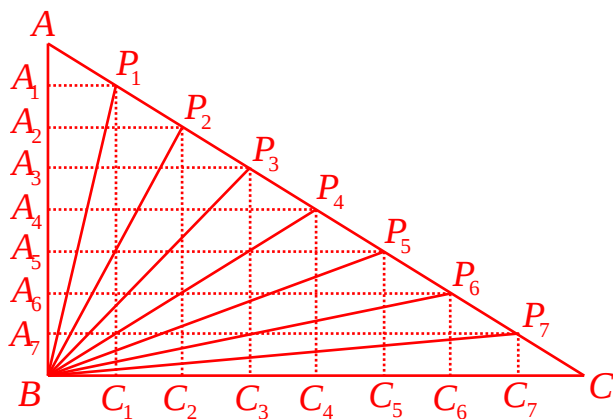
即 $3 \geq b \geq 2$ ，故知 $b=2$ 或 3。若 $b=2$ ，則 $p=23$ ；若 $b=3$ ，則 $p = \frac{17}{3}$ ，不合。因此

$p=23$ ，此時二次方程式為 $x^2-5x-1634=0$ ，二根為 43、-38，滿足題意。
故所求為 5 與 23。

答：5 與 23

2. 直角三角形 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 為直角而 AC 為斜邊，點 $P_1、P_2、\dots、P_7$ 將 AC 邊分為 8 等分，已知 $BP_1^2 + BP_2^2 + \dots + BP_7^2 = 70$ 公分，請問 AC 的長度為多少公分？

【解】



如圖，令 A_n 為 P_n 在 AB 邊上的垂足、 C_n 為 P_n 在 BC 邊上的垂足。
則由畢氏定理可知

$$\begin{aligned} & BP_1^2 + BP_2^2 + \dots + BP_7^2 \\ &= (A_1P_1^2 + C_1P_1^2) + (A_2P_2^2 + C_2P_2^2) + \dots + (A_7P_7^2 + C_7P_7^2) \end{aligned}$$

因點 $P_1、P_2、\dots、P_7$ 將 AC 邊分為 8 等分，故可知 $P_nA_n = nP_1A_1$ 、 $BC = 8P_1A_1$ 、 $P_{8-n}C_{8-n} = nP_7C_7$ 、 $AB = 8P_7C_7$ 。令 $P_1A_1 = a$ 、 $P_7C_7 = b$ ，則可知

$$\begin{aligned} (A_1P_1^2 + C_1P_1^2) + (A_2P_2^2 + C_2P_2^2) + \dots + (A_7P_7^2 + C_7P_7^2) &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2)(a^2 + b^2) \\ &= 140(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

即可得知 $a^2 + b^2 = \frac{70}{140} = \frac{1}{2}$ 。

因 $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64(a^2 + b^2)$ ，故 $AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 公分。

答： $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 公分

3. 在下面 3×3 的九宮格內，將九個不同的數字 1、2、3、4、5、6、7、8、9 分別填入不同的小方格中，使得七個三位數 $\overline{abc}$ 、 $\overline{def}$ 、 $\overline{ghi}$ 、 $\overline{adg}$ 、 $\overline{beh}$ 、 $\overline{cfi}$ 和 $\overline{aei}$ 都能被 11 整除；求三位數 $\overline{ceg}$ 的最大值。

a	b	c
d	e	f
g	h	i

【解】

因 $\overline{abc}$ 、 $\overline{def}$ 、 $\overline{ghi}$ 、 $\overline{adg}$ 、 $\overline{beh}$ 、 $\overline{cfi}$ 和 $\overline{aei}$ 都能被 11 整除，故知 $a+c-b$ 、 $d+f-e$ 、 $g+i-h$ 、 $a+g-d$ 、 $b+h-e$ 、 $c+i-f$ 和 $a+i-e$ 之值為 0 或 11，即此七式之和 $3a+2c-3e+2g+3i=3(a+i-e)+2(c+g)$ 為 11 的倍數。

因 $a+i-e$ 之值為 0 或 11，故 $2(c+g)$ 為 11 的倍數，即 $c+g=11$ 。

而由 e 的取值，可決定 $a+i-e$ 、 $b+h-e$ 、 $d+f-e$ 的取值，即 (a, i) 、 (b, h) 與 (d, f) 這三對數字的取值。

因

$$\begin{aligned}(a+i-e) + (b+h-e) + (d+f-e) &= a+b+d+f+h+i-3e \\ &= a+b+c+d+e+f+g+h+i-(c+g)-4e \\ &= 45-11-4e \\ &= 34-4e\end{aligned}$$

故知 $34-4e$ 必為 11 的倍數，此時僅 $e=3$ 可滿足。

而當 $e=3$ 時， $a+i$ 、 $b+h$ 、 $d+f$ 的取值為 3 或 14，即 (a, i) 、 (b, h) 與 (d, f) 這三對數字的取值為 $(1, 2)$ 、 $(5, 9)$ 與 $(6, 8)$ 這三對，此時剩下 7、4 未確定，其和恰為 11，故知此即為 (c, g) 的取值範圍，而因要求出 $\overline{ceg}$ 的最大值，不妨令 $c > g$ ，則可知 $c=7$ 、 $g=4$ ，而可利用如下的填法完成題目所要求之九宮格：

1	8	7
5	3	9
4	6	2

因此 $\overline{ceg}$ 的最大值為 734。

答：734