

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2013 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽 個人賽試題

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：☐男 ☐女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；答案若為分數，請化為最簡分數)

1. 從 100 到 999 之間的整數中，其個位數數碼和百位數數碼之差為 3 的數共有_____個。

【參考解法】

可令 axb 為個位數數碼和百位數數碼之差為 3 的數。可知當 a 、 b 確定時， x 有 0、1、2、...、9 等 10 種可能，而 a 、 b 之值有以下幾種情況：

- (a) 當 $b=0$ 時，則 $a=3$ ，故此情況共有 $1 \times 10 = 10$ 個數；
(b) 當 $b \neq 0$ 時，則 $(a, b) = (1, 4)、(4, 1)、(2, 5)、(5, 2)、(3, 6)、(6, 3)、(4, 7)、(7, 4)、(5, 8)、(8, 5)、(6, 9)、(9, 6)$ ，故此情況共有 $12 \times 10 = 120$ 個數。

因此共有 $10 + 120 = 130$ 個數滿足條件。

答：130

2. 算式 $3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333 \cdots 333}_{2013 \text{ 個 } 3}$ 之和的最後四個數碼為_____。

【參考解法】

$$\begin{aligned} & 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333 \cdots 333}_{2013 \text{ 個 } 3} \\ &= 3 \times 2013 + 30 \times 2012 + 300 \times 2011 + 3000 \times 2010 + 10^4 (3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333 \cdots 333}_{2009 \text{ 個 } 3}) \\ &= 6039 + 60360 + 603300 + 6030000 + 10^4 (3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333 \cdots 333}_{2009 \text{ 個 } 3}) \\ &= 6699699 + 10^4 (3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333 \cdots 333}_{2009 \text{ 個 } 3}) \end{aligned}$$

故知所求為 9699。

答：9699

3. 已知 $n-9$ 為正整數，且 $n-9$ 為 $n^3 - 300$ 的因數，則 n 的最大值為_____。

【參考解法】

$\frac{n^3 - 300}{n - 9} = n^2 + 9n + 81 + \frac{429}{n - 9}$ ，故知 $n - 9$ 為 $n^3 - 300$ 的因數的充要條件為 $n - 9$ 是 429 的因數，即可推得 $n - 9$ 的最大值為 429，因此 n 的最大值為 438。

答：438

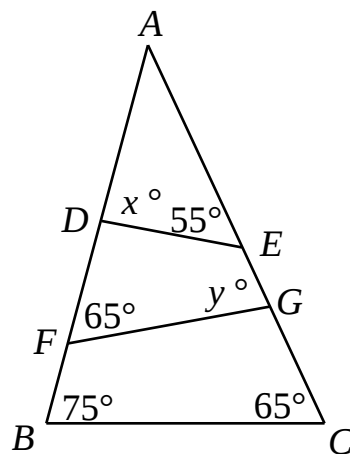
4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知點 D 、 F 為 AB 邊上的兩個點， E 、 G 為 AC 邊上兩個點。連接 DE 、 FG ，如圖所示。已知各角之度數如圖上所標記，則 $x+y$ 之值為_____。

【參考解法】

比較 $\triangle AFG$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ ，

可知 $65 + y = 75 + 65 = x + 55$ ，故 $y = 75$ 、 $x = 85$ ，

因此可得知 $x + y = 85 + 75 = 160$ 。



答：160

5. 已知 O 為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $BC = AO + AC$

且 $\angle ABC = 35^\circ$ ，如圖所示，則 $\angle BAC$
= _____。

【參考解法】

在 BC 上取一點 D 使得 $BD = AO$ ，連接 OD 、 OB 。

可知 $CD = BC - BD = BC - AO = AC$ 、

$\angle ACO = \angle DCO$ 、

$OC = OC$ ，

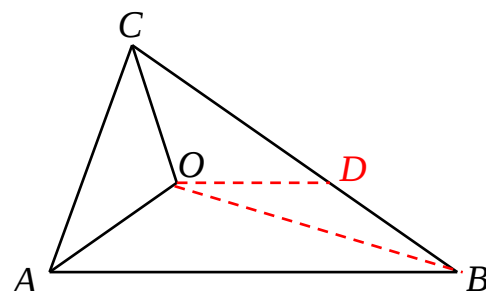
此時便可以得知 $\triangle AOC \cong \triangle DOC$ ，

也因此知 $\angle CDO = \angle CAO = \angle OAB$ 且 $OD = OA = DB$ ，於是可進一步推得 $\angle DBO = \angle DOB$ 。

因 $\angle ABC = 35^\circ$ ，所以 $\angle DBO = 17.5^\circ$ 。

於是可得 $\angle BAC = 2\angle CAO = 2\angle CDO = 2(\angle DBO + \angle DOB) = 4\angle DBO = 70^\circ$ 。

答：70



6. 從1、3、5、7、9五個奇數中選取四個不同的數 p 、 q 、 r 、 s ，則 $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ 的最小值為_____。

【參考解法】

明顯可知所選大的數要放在分母、小的數要放在分子。先考慮若所選取的分子可相同、分母不可相同的情形。此時最小值為 $\frac{1}{9} + \frac{1}{7}$ ，共選了三個數，故這不是題目所要求的數。因 $\frac{3}{7} > \frac{3}{9}$ ，可判斷出第二小的數為 $\frac{3}{9} + \frac{1}{7}$ ，共選了四個數，

符合條件。故知所求之值為 $\frac{3}{9} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$ 。

符合條件。故知所求之值為 $\frac{3}{9} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$ 。

答： $\frac{10}{21}$

7. 設 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 是由 1、2、3、...、9 九個數碼排列而成的九位數，其中每一個數碼恰只在 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 中出現一次，若 $\overline{b_1b_2\cdots b_9}$ 是由 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 重新排列的任意一個九位數；則 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 和 $\overline{b_1b_2\cdots b_9}$ 的最大公因數為_____。

【參考解法】

因 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 和 $\overline{b_1b_2\cdots b_9}$ 的數碼和皆為 $1+2+3+\cdots+9=45=9\times 5$ ，故兩數的最大公因數至少為 9。而由 $123456798-123456789=9$ 得知 123456789 與 123456798 的最大公因數為 9，即 $\overline{a_1a_2\cdots a_9}$ 和 $\overline{b_1b_2\cdots b_9}$ 的最大公因數至多為 9。故知所求為 9。

答：9

8. 已知函數 $f(x)=\begin{cases} f(f(x+7)), & x\leq 25 \\ x-6, & x>25 \end{cases}$ ，則 $f(1)+f(2)+\cdots+f(25)$ =_____。

【參考解法】

可知 $f(25)=f(f(32))=f(26)=20$ 、
 $f(24)=f(f(31))=f(25)=20$ 、
 $f(23)=f(f(30))=f(24)=20$ 、
 $f(22)=f(f(29))=f(23)=20$ 、

⋮

$f(1)=f(f(8))=f(2)=20$ 。

故 $f(1)+f(2)+\cdots+f(25)=20\times 25=500$ 。

答：500

9. 設 k 為正整數且 x 、 y 為整數，若方程 $138x+222y=10^{2013}+k$ 有整數解，則 k 的最小值為_____。

【參考解法】

因 $138x+222y=6(23x+37y)$ ，故知 $10^{2013}+k$ 必為偶數也是 3 的倍數，即 k 為偶數且 $1+k$ 為 3 的倍數，因此 k 必為 $6m+2$ 的形式，其值至少為 2。

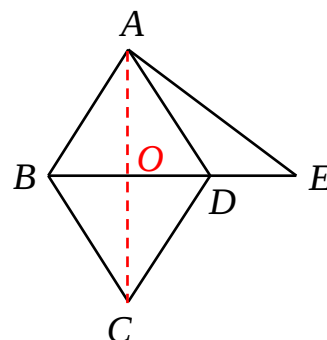
若 $k=2$ ，則方程式為 $138x+222y=10^{2013}+2$ ，即 $23x+37y=\underbrace{16\cdots 67}_{2011\text{個}6}$ 。因 23、37

為互質的二個數，可計算出 $1=5\times 37-8\times 23$ ，將等式兩邊同乘以 $\underbrace{16\cdots 67}_{2011\text{個}6}$ ，即可

得到一整數解。因此 k 的最小值為 2。

答：2

10. 右圖為菱形 $ABCD$ 與三角形 ABE 的重疊情形，其中 D 在 BE 上。若 AE 、 AB 、 BD 的長度分別比 DE 的長度多 13 cm、5 cm、4 cm，則 DE 的長度為_____cm。



【參考解法】

令 $DE = a$ ，則知 $AE = a+13$ 、 $AB = a+5$ 、 $BD = a+4$ 。

連接 AC 交 BD 於 O 點，則由 $ABCD$ 為菱形可知 $BO = DO = \frac{a}{2} + 2$ 且 $AO \perp BE$ 。

再由勾股定理可得知：

$$AE^2 = AO^2 + OE^2 = (AB^2 - BO^2) + (OD + DE)^2$$

$$(a+13)^2 = (a+5)^2 - \left(\frac{a}{2} + 2\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + 2 + a\right)^2$$

$$a^2 + 26a + 169 = a^2 + 10a + 25 - \frac{1}{4}a^2 - 2a - 4 + \frac{9}{4}a^2 + 6a + 4$$

$$0 = 2a^2 - 12a - 144$$

$$0 = a^2 - 6a - 72$$

$$0 = (a-12)(a+6)$$

因此 $a = 12$ 或 -6 (負不合)，故知 $DE = 12$ cm。

答：12

11. 某次數學競賽共有 20 道試題，給分方式如下：

每答對一題可得 9 分；

對於每一個未作答的題目，該題給 4 分；

每答錯一題，該題則給 1 分。

已知小明在這一次競賽中的得分是 118 分，則他在此次競賽中答錯的題數為_____題。

【參考解法】

可令小明共答對 x 題、未作答 y 題、答錯 z 題，則有：

$$9x + 4y + z = 118$$

$$x + y + z = 20$$

兩式相減後可得：

$$8x + 3y = 98$$

$$y = 32 - 2x + \frac{2-2x}{3}$$

故知 y 為正整數僅發生在 $x \equiv 1 \pmod{3}$ 且 $1 \leq x \leq 12$ 時。故可造表如下：

x	y	z	
1	30		$x+y > 20$ ，矛盾
4	22		$x+y > 20$ ，矛盾
7	14		$x+y > 20$ ，矛盾
10	6	4	

故知僅答對 10 題、未作答 6 題、答錯 4 題的情況可得 118 分。

答：4 題

12. 已知 $a = \frac{9}{17}$ 、 $b = \frac{1}{4}$ 、 $c = \frac{15}{68}$ ，則 $\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【參考解法】

可知 $a+b+c = \frac{36+17+15}{68} = 1$ ，故可將分子化簡為：

$$\begin{aligned} & a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{1}{b}(a^2-c^2)+\frac{1}{c}(b^2-a^2)+\frac{1}{a}(c^2-b^2) \\ &= \frac{1}{b}(a+c)(a-c)+\frac{1}{c}(b+a)(b-a)+\frac{1}{a}(c+b)(c-b) \\ &= \frac{1}{b}(1-b)(a-c)+\frac{1}{c}(1-c)(b-a)+\frac{1}{a}(1-a)(c-b) \\ &= \frac{1}{b}(a-c)-(a-c)+\frac{1}{c}(b-a)-(b-a)+\frac{1}{a}(c-b)-(c-b) \\ &= \frac{1}{b}(a-c)+\frac{1}{c}(b-a)+\frac{1}{a}(c-b) \\ &= a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

最後所得到的式子即為分母，且因

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) &= \frac{a}{b}-\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-\frac{c}{b} \\ &= \frac{36}{17}-\frac{36}{15}+\frac{17}{15}-\frac{17}{36}+\frac{15}{36}-\frac{15}{17} \\ &= \left(\frac{36}{17}-\frac{15}{17}\right)+\left(\frac{17}{15}-\frac{36}{15}\right)+\left(\frac{15}{36}-\frac{17}{36}\right) \\ &= \frac{21}{17}-\frac{21}{15}-\frac{2}{18} < 0 \end{aligned}$$

$$\left(\text{因為 } \frac{21}{17}-\frac{21}{15} < 0\right)$$

觀察最後所得到的分式的分母必不為0(或直接計算可得該值為 $\frac{-337}{1530} \neq 0$)，而由上式已知分式的分母等於分子，因此所求之值為1。

答：1

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 若 n 為正整數，則 $n!$ 表示前 n 個連續正整數的乘積，即

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1,$$

例如： $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 。若 $m!$ 是 $2^{11} \times 3^4 \times 5^2$ 的倍數，請問正整數 m 的值至少為多少？

【參考解法】

透過觀察可知：

- (1) 因 $m!$ 是 5^2 的倍數，而 $5=5$ 、 $10=2 \times 5$ ，故知 $m \geq 10$ ；
- (2) 因 $m!$ 是 3^4 的倍數，而 $3=3$ 、 $6=2 \times 3$ 、 $9=3 \times 3$ ，故知 $m \geq 9$ ；
- (3) 因 $m!$ 是 2^{11} 的倍數，而 $2=2$ 、 $4=2 \times 2$ 、 $6=3 \times 2$ 、 $8=2 \times 2 \times 2$ 、 $10=5 \times 2$ 、 $12=3 \times 2 \times 2$ 、 $14=7 \times 2$ ，故知 $m \geq 14$ 。

因此 m 的值至少為 14

答：14

2. 若 a 為正整數，且已知一元二次方程 $(a-1)x^2 - cx + a = 0$ 有兩個正整數根，試求 $(a^c + c^a)(a^a + c^c)$ 之值。

【參考解法】

令 α 、 β 為 $(a-1)x^2 - cx + a = 0$ 的兩個正整數根，則利用根與係數的關係可以得知 $\alpha\beta = \frac{a}{a-1}$ 必為正整數，再由 a 與 $a-1$ 的最大公因數為 1 可得知 $a-1=1$ ，即 $a=2$ ，因此 $\alpha\beta=2$ 。接著再因為 α 、 β 都是正整數，故可以推知 α 、 β 一定是 1 與 2，由 $\alpha + \beta = \frac{c}{a-1}$ ，所以 $c = \alpha + \beta = 1 + 2 = 3$ 。

因此 $(a^c + c^a)(a^a + c^c) = (2^3 + 3^2)(2^2 + 3^3) = 17 \times 31 = 527$ 。

答：527

3. 如下圖， O 為 $\triangle ABC$ 外接圓的圓心，由點 B 作 AC 的垂線、垂足為點 D ，再延長 BD 交圓 O 於點 P ，由點 C 作 AB 的垂線、垂足為點 E ，再延長 CE 交圓 O 於點 Q ，連接 DE 、 PQ 。

- 求證： (a) $DE \parallel PQ$ ； (10 分)
(b) $OA \perp DE$ 。 (10 分)

【參考解法】

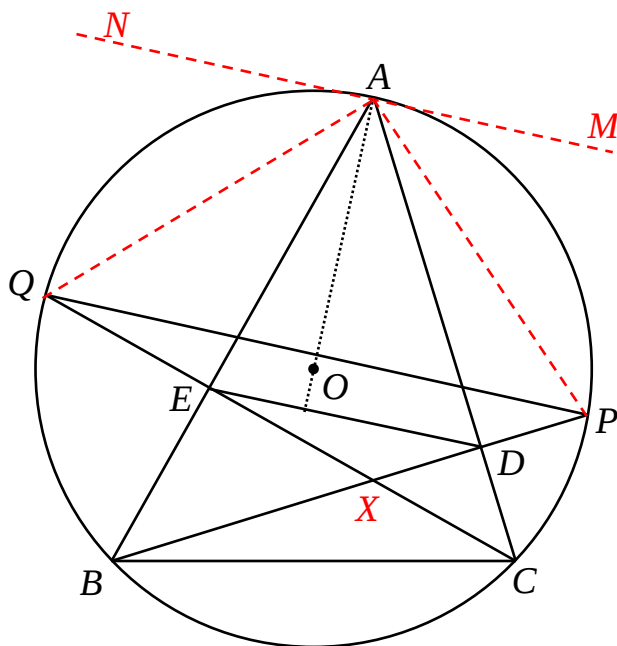
(a) 由圓周角的關係可知

$$\angle QPB = \angle QCB。$$

而由 $BD \perp AC$ 、 $CE \perp AB$ 可知 B 、 C 、 D 、 E 位於以 BC 為直徑的圓上，故再由圓周角的關係可知

$$\angle EDB = \angle ECB。$$

因此 $\angle EDB = \angle ECB = \angle QCB = \angle QPB$ ，所以 $DE \parallel PQ$ 。



(b) 【證法1】

連接 AQ 、 AP 。

因 $BD \perp AC$ 、 $CE \perp AB$ ，故可知 $\angle BEX = \angle XDC = 90^\circ$ 。

再由 $\angle EXB = \angle DXC$ 便可推知 $\angle EBX = \angle DCX$ ，即 $\angle ABP = \angle ACQ$ ，故弧 $AQ = \text{弧}AP$ 。再因 OA 為半徑，因此可知 $OA \perp PQ$ ，即 $OA \perp DE$ 。

【證法2】

過點 A 作圓 O 的切線 MN 。因 B 、 C 、 D 、 E 四點共圓，故知 $\angle BED + \angle ACB = 180^\circ$ ，因此 $\angle AED = \angle ACB$ 。而再由弦切角與圓周角的關係知 $\angle NAB = \angle ACB$ ，故 $\angle NAB = \angle AED$ ，因此 $MN \parallel DE$ 。而 $OA \perp MN$ ，故 $OA \perp DE$ 。