2014年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題

_________縣市_________國民中學_____年級　編號：_________　姓名：__________

作答時間: 二小時　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　性別:□男 □女

第一部分：填充題，每小題5分，共60分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. .設 $N=2^3+4^3+6^3+\cdots+2012^3+2014^3$，則 N 的末兩位數碼為______________。

【參考解法1】

$$\begin{aligned} N&=2^3+4^3+6^3+\cdots+2012^3+2014^3\\ &=2^3(1^3+2^3+3^3+\cdots+1006^3+1007^3)\\ &=2^3\times(\frac{1007(1007+1)}{2})^2\\ &=2\times1007^2\times1008^2 \end{aligned}$$

可判斷出 N 的末兩位數碼與 $2\times7^2\times8^2$ 相同，即與 $2\times49\times64=6272$ 相同，故所求為72。

【參考解法2】

可知 N 的末兩位數碼即為 N 在模100之下的取值。故有

$$\begin{aligned} N&=2\times1007^2\times1008^2\\ &\equiv2\times7^2\times8^2 \pmod{100}\\ &\equiv(2\times7\times7)\times(8\times8) \pmod{100}\\ &\equiv(-2)\times(-36) \pmod{100}\\ &\equiv72 \pmod{100} \end{aligned}$$

答：72

2. 設 $M=1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+101\times102\times103$，則 $M=$______________。

【參考解法1】

$$\begin{aligned} M&=1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+101\times102\times103\\ &=(2-1)\times2\times(2+1)+(3-1)\times3\times(3+1)+\cdots+(102-1)\times102\times(102+1)\\ &=2^3-2+3^3-3+\cdots+102^3-102\\ &=(1^3+2^3+3^3+\cdots+102^3)-(1+2+3+\cdots+102)\\ &=(\frac{102\times(102+1)}{2})^2-\frac{102\times(102+1)}{2}\\ &=(51\times103)^2-51\times103\\ &=27588756 \end{aligned}$$

【參考解法 2】

$$M=1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+101\times102\times103=6(C_3^3+C_3^4+C_3^5+\cdots+C_3^{103})$$
$$=6(C_4^4+C_3^4+C_3^5+\cdots+C_3^{103})$$
$$=6(C_4^5+C_3^5+\cdots+C_3^{103})$$
$$\vdots$$
$$=6(C_4^{103}+C_3^{103})$$
$$=6\times C_4^{104}$$
$$=27588756$$

答：27588756

3. 若 n 為一個正整數，則滿足方程

$$\frac{3}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\frac{5}{n^3}+\cdots+\frac{n^3-5}{n^3}+\frac{n^3-4}{n^3}+\frac{n^3-3}{n^3}=169$$

之 n 的值為 ______________。

【參考解法 1】

若 n 為偶數，則可知存在正整數 k 使得 $n^3=2k$ 且有：

$$\frac{3}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\cdots+\frac{k-1}{n^3}+\frac{k}{n^3}+\frac{n^3-(k-1)}{n^3}+\cdots+\frac{n^3-4}{n^3}+\frac{n^3-3}{n^3}=169$$
$$\frac{(k-3)n^3+k}{n^3}=169$$
$$k=\frac{172n^3}{n^3+1}$$

因 n^3 與 n^3+1 互質，故知 n^3+1 為 172 的因數。再因 172 的因數有 1、2、4、43、86、172，故知 n^3 可能為 0、1、3、42、85、171，其中僅 1 為立方數，但此時 $n=1$，與 n 為偶數矛盾；

若 n 為奇數，則可知存在非負整數 k 使得 $n^3=2k+1$ 且有：

$$\frac{3}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\cdots+\frac{k-1}{n^3}+\frac{k}{n^3}+\frac{n^3-k}{n^3}+\frac{n^3-(k-1)}{n^3}+\cdots+\frac{n^3-4}{n^3}+\frac{n^3-3}{n^3}=169$$
$$\frac{n^3(k-2)}{n^3}=169$$
$$k=171$$

因此 $n^3=2\times171+1=343$，即 $n=7$。

【參考解法 2】

可知左式中，每一項的分數都是真分數。現兩兩配對，將第 m 項與倒數第 m 項配成一對並計算其和後都可得到整數 1，例如第一項與最後一項配成一對可得 $\frac{3}{n^3}+\frac{n^3-3}{n^3}=1$，將第二項與倒數第二項配成一對可得 $\frac{4}{n^3}+\frac{n^3-4}{n^3}=1$，依此類推。因此由此式的值 169 為整數可判斷出可依此方式兩兩配對將全部的真分數

都配對而不會有單一的分數無法配對，即左式共有偶數項，且可得知存在一個正整數 k 使得

$$(\frac{3}{n^3}+\frac{n^3-3}{n^3})+(\frac{4}{n^3}+\frac{n^3-4}{n^3})+\cdots+(\frac{k}{n^3}+\frac{n^3-k}{n^3})=169$$

$$\frac{n^3(k-2)}{n^3}=169$$

$$k=171$$

因此 $n^3=2\times171+1=343$，即 $n=7$。

【參考解法 3】

可知左式中，每一項的分數都是真分數，且共有 $(n^3-3)-3+1=n^3-5$ 項。現兩兩配對，將第 m 項與倒數第 m 項配成一對並計算其和後都可得到整數 1，例如第一項與最後一項配成一對可得 $\frac{3}{n^3}+\frac{n^3-3}{n^3}=1$，將第二項與倒數第二項配成一對可得 $\frac{4}{n^3}+\frac{n^3-4}{n^3}=1$，依此類推。因此由此式的值 169 為整數可判斷出可依此方式兩兩配對將全部的真分數都配對而不會有單一的分數無法配對。可知每一組配對的平均值為 $\frac{1}{2}$，所以一共有 $2\times169=338$ 項，即可得知 $n^3-5=338$，故有 $n^3=343$，因此 $n=7$。

答：7

4. 某社區中有 12 住戶，林先生是其中一個住戶，且林先生的家每天收到的信都比這個社區中任一其他住戶收到的信多，如果這個社區今天共收到 58 封信，則林先生家今天收到的信至少有____________封。

【參考解法】

因 $58=12\times4+10$，故由抽屜原理知至少有一戶人家所收到的信為 $4+1=5$ 封。若林先生家今天收到的信為 5 封，則可知其餘 11 戶人家共收到 53 封，再因為 $53=11\times4+9$，故由抽屜原理知至少有另一戶人家所收到的信為 $4+1=5$ 封，矛盾，故可知林先生家今天收到的信至少有 6 封，例如其餘 11 家中有 8 家收到 5 封信、3 家收到 4 封信。

答： 6 封

5. 若正整數 n 的函數 $f(n)$ 滿足

$$f(n+2)=f(n+1)-f(n)，$$

則 $f(n)$ 最多能有__________個不同的值。

【參考解法】

觀察可得：

$f(3)=f(2)-f(1)$、

$f(4)=f(3)-f(2)=f(2)-f(1)-f(2)=-f(1)$、

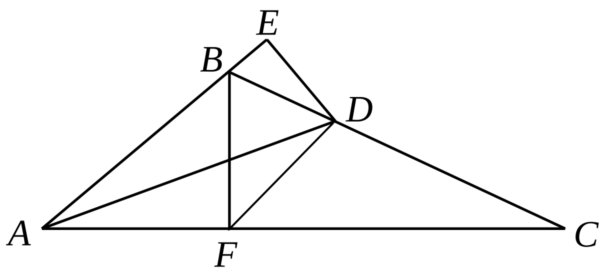
$f(5)=f(4)-f(3)=-f(1)-f(2)+f(1)=-f(2)$、

$f(6)=f(5)-f(4)=-f(2)-(-f(1))=-(f(2)-f(1))=-f(3)$、
$f(7)=f(6)-f(5)=-f(3)-f(2)=-f(2)+f(1)-f(2)=f(1)$、
$f(8)=f(7)-f(6)=f(1)-(-f(3))=f(1)+f(2)-f(1)=f(2)$，
此時便可推知 $f(6n+a)=f(a)$，其中$1\le a\le 6$。故知當 $f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f(4)=-f(1)$、$f(5)=-f(2)$、$f(6)=-f(3)$ 的值皆兩兩互不相同時，例如 $f(1)=1$、$f(2)=3$、$f(3)=2$、$f(4)=-f(1)=-1$、$f(5)=-f(2)=-3$、$f(6)=-f(3)=-2$ 時，$f(n)$ 最多能有 6 個不同的值。

答：6 個

6. 下圖中，已知線段 AD 為 $\angle EAC$ 的角平分線且 $BF\perp AC$，若 $\angle E=90^\circ$、$\angle ADB=45^\circ$、$\angle BDE=25^\circ$，則 $\angle FDC$ = ＿＿＿＿＿＿。

【參考解法】



可知

$\angle ADE=\angle ADB+\angle BDE=45^\circ+25^\circ=70^\circ$

故 $\angle EAD=180^\circ-90^\circ-70^\circ=20^\circ$；

再因線段 AD 為 $\angle EAC$ 的角平分線，

所以可得知 $\angle EAC=20^\circ\times 2=40^\circ$。

因此知

$\angle ABD=\angle E+\angle BDE=90^\circ+25^\circ=115^\circ$，

故

$$\begin{aligned}\angle C&=\angle ADB-\angle DAC\\&=45^\circ-20^\circ\\&=25^\circ\end{aligned}$$

此時可知 $\angle FBC=180^\circ-\angle BFC-\angle C=180^\circ-90^\circ-25^\circ=65^\circ$，

而 $\angle DBE=180^\circ-\angle BDE-\angle E=180^\circ-90^\circ-25^\circ=65^\circ$，即有 $\angle FBC=\angle DBC$，故可推知 BC 為 $\angle FBE$ 的角平分線，因此可得 D 為 $\triangle ABF$ 的一個旁心，所以 DF 為 $\angle BFC$ 的角平分線，即 $\angle DFC=45^\circ$，此時便可得知

$$\begin{aligned}\angle FDC&=180^\circ-\angle DFC-\angle C\\&=180^\circ-45^\circ-25^\circ\\&=110^\circ\end{aligned}$$

答：110°

7. 若 k 為正整數，且 $k<50$，則使 k^3+11 能被 12 整除的 k 共有＿＿＿＿＿個。

【參考解法】

因 k^3+11 能被 12 整除，故知 $k^3\equiv 1\pmod{12}$，此時可判斷出 k 為奇數。

若 $k\equiv 1\pmod{12}$，則 $k^3\equiv 1\pmod{12}$，再由 $k<50$ 可得知 $k=1$、13、25、37 或 49，共 5 個數滿足題意；

若 $k\equiv 3\pmod{12}$，則 $k^3\equiv 3\pmod{12}$，故不合；

若 $k\equiv 5\pmod{12}$，則 $k^3\equiv 5\pmod{12}$，故不合；

若 $k\equiv 7\pmod{12}$，則 $k^3\equiv 7\pmod{12}$，故不合；
若 $k\equiv 9\pmod{12}$，則 $k^3\equiv 9\pmod{12}$，故不合；
若 $k\equiv 11\pmod{12}$，則 $k^3\equiv 11\pmod{12}$，故不合。
因此共有 5 個數滿足題意。

答：5 個

8. 已知符號$[A]$表示不大於 A 的最大整數值，若 $A=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{400}}$，則$[A]=$ ________。

【參考解法】
可知 $\sqrt{k-1}<\sqrt{k}<\sqrt{k+1}$，故

$$\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}>\frac{1}{2\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}>\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})>\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

因此有：

$$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-\sqrt{1})$$

$$2(\sqrt{4}-\sqrt{3})<\frac{1}{\sqrt{3}}<2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\vdots$$

$$2(\sqrt{401}-\sqrt{400})<\frac{1}{\sqrt{400}}<2(\sqrt{400}-\sqrt{399})$$

將以上 399 條不等式相加，便可得

$$2(\sqrt{401}-\sqrt{2})<A-1<2(\sqrt{400}-\sqrt{1})$$

此即有 $37<2(\sqrt{400}-\sqrt{2})<2(\sqrt{401}-\sqrt{2})<A-1<2(\sqrt{400}-1)=2\times 19=38$，因此

$$38<A<39$$

故知$[A]=38$。

答：38

9. 有 n 個學校派學生代表參加聯歡活動，每個學校參加的學生最少為 1 人最多為 28 人。已知參加活動的各校總學生數為 1825 人，現擬將他們分組做競賽活動，要求每組學生最少為 1 人最多為 170 人且同一學校的學生一定要分在同一組，則至少要________組才必定能滿足上述的要求。

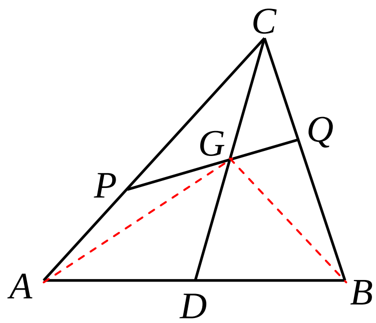
【參考解法】

將所有學生排成一列，並每 170 人切割，可分成 11 段。若切割處將某校學生分開，則將此校學生全部抽出。此時，被抽出的學生至多為$10\times28=280$人，已知 280+56=336<340，所以一定可以分為二組，故分為 $11+2=13$ 組可以滿足要求。
若有 73 個學校，每個學校各派 25 人，總參加學生數為 1825 人。因要求同一學校的學生一定要分在同一組，故每組最多只能為 150 人，而 12 組的總學生數為 1800 人，這說明只分 12 組可能無法滿足要求。
故至少需 $11+2=13$ 組才能滿足這樣的要求。
舉例來看，若這 1825 個學生是由 73 間學校分別各派 25 位學生所組成的，則由$7\times25=175>170$可知每一組至多可由 6 個學校所派出的 25 位學生組成，再因為$6\times12=72<73$，故知僅分成 12 組是不夠的，因此至少需分成 13 組。

答：13 組

10.如下圖，在$\triangle ABC$中，已知 D 為 AB 的中點，G 為 CD 的中點，過 G 作一直線分別與 AC、BC 交於點 P、Q，則 $\dfrac{CA}{CP}+\dfrac{CB}{CQ}$ 之值為________。

【參考解法 1】

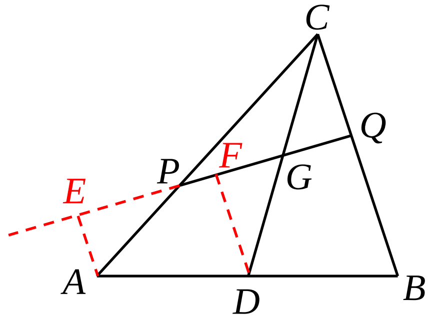


連結 GA、GB，並令 $CP=s$、$AP=t$、$CQ=u$、$QB=v$。可知 $\dfrac{CA}{CP}=\dfrac{s+t}{s}$、$\dfrac{CB}{CQ}=\dfrac{u+v}{u}$。
若令$\triangle ABC$的面積為 1，由共邊定理可推知
$\triangle CPQ$ 的面積為 $\dfrac{su}{(s+t)(u+v)}$，且也可得知
$\triangle ACG$、$\triangle CGB$ 的面積都是 $\dfrac{1}{4}$，並據此可推知
$\triangle CGP$ 的面積為 $\dfrac{s}{4(s+t)}$、$\triangle AGP$ 的面積為 $\dfrac{t}{4(s+t)}$、$\triangle CGQ$ 的面積為 $\dfrac{u}{4(u+v)}$、$\triangle BGQ$ 的面積為 $\dfrac{t}{4(u+v)}$。所以$\triangle CPQ$的面積為
$\dfrac{s}{4(s+t)}+\dfrac{u}{4(u+v)}=\dfrac{s(u+v)+u(s+t)}{4(s+t)(u+v)}$，所以有：

$$\frac{s(u+v)+u(s+t)}{4(s+t)(u+v)}=\frac{su}{(s+t)(u+v)}$$
$$s(u+v)+u(s+t)=4su$$
$$\frac{u+v}{u}+\frac{s+t}{s}=4$$
$$\frac{CA}{CP}+\frac{CB}{CQ}=4$$

【參考解法 2】

延長 PQ，在直線 PQ 上取 E、F 使得 $AE//DF//CB$，如圖所示。令 $CQ=u$ 、 $QB=v$ 。



因已知 $CG=GD$ 且 $DF//CQ$，故可推知△DFG≅△CQG 且由此知 $DF=CQ=u$ ；再因已知 $AD=DB$ 且 $AE//DF//QB$，故可推知 DF 為梯形 $ABQE$ 的中位線，因此知 $AE=2DF-BQ=2u-v$ 。

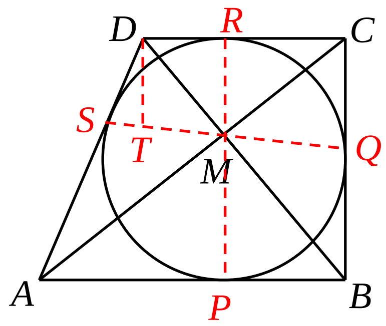
再因 $AE//CQ$ 即可得知 $\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{AE}{CQ}=\dfrac{2u-v}{u}$ ，故

$\dfrac{CA}{CP}=1+\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{3u-v}{u}$ ，因此 $\dfrac{CA}{CP}+\dfrac{CB}{CQ}=\dfrac{3u-v}{u}+\dfrac{u+v}{u}=4$ 。

答： 4

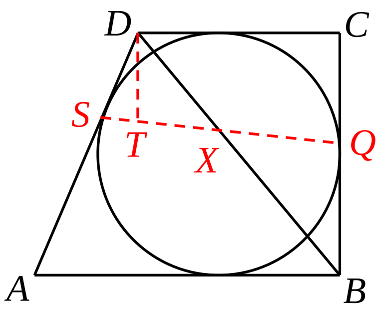
11.如下圖，梯形 $ABCD$ 之對角線 AC、BD 交於點 M，$AB//CD$，$\angle ABC=90°$ 。已知梯形 $ABCD$ 有一半徑為 5 的內切圓，則△ADM 的面積為__________ 。

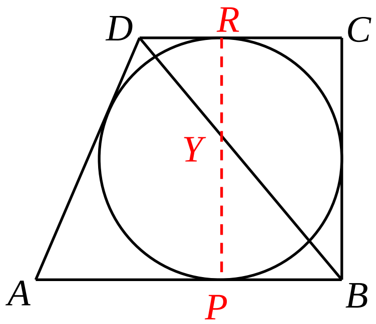
【參考解法 1】



因 $\angle ABC=90°$，故知 BC 即為梯形 $ABCD$ 的高。因△ABC 與△ABD 的面積皆為 $\dfrac{AB\times BC}{2}$，故可以推知△ADM 的面積與△BMC 的面積相等。

令 P、Q、R、S 分別為梯形 $ABCD$ 的內切圓在 AB、BC、CD、DA 上的切點，連接 PR、QS。過 D 點作 $DT//BC$ 交 SQ 於 T 點。此時由平行線同位角相等及同一條弦的弦切角相等可得知 $\angle DTS=\angle CQS=\angle DST$ ，因此 $DT=DS=DR$ 。現假設 BD 與 SQ 交於點 X、BD 與 PR 交於點 Y：

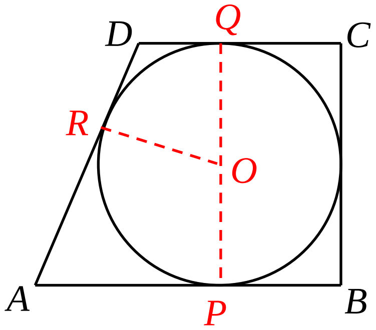


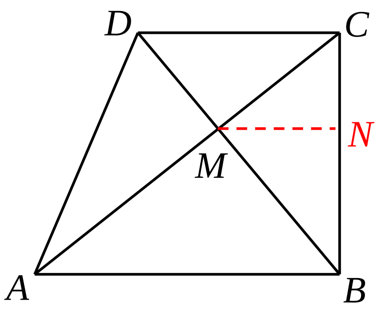


則有 $\dfrac{DX}{XB}=\dfrac{DT}{BQ}$ 、 $\dfrac{DR}{PB}=\dfrac{DY}{YB}$ ；再因 $DT=DR$ 、 $PB=BQ$ ，故有 $\dfrac{DX}{XB}=\dfrac{DY}{YB}$ 。因 X、Y 都在 BD 上，故可得知 X、Y 重合，即 BD、PR、SQ 共點。同理，AC、PR、SQ 共點，因此可進一步推知 BD、AC、PR、SQ 共點，所以 BD 與 AC 的交點 M 在 PR 上，故△BMC 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times BC\times PB=\dfrac{1}{2}\times10\times5=25$ 。

【參考解法 2】

因△ABC 與△ABD 的面積相等，故可知△ADM 的面積與△BMC 的面積相等。令 O 為梯形 $ABCD$ 內切圓的圓心，P、Q、R 分別為圓 O 在 AB、CD、DA 上的切點，如圖所示。





再令 $AP=p$ 、 $DQ=q$ ，則可知 $AD=AR+DR=AP+DQ=p+q$ ，再由勾股定理可得知 $AD^2=(AP-DQ)^2+PQ^2$ ，即 $(p+q)^2=(p-q)^2+10^2$ ，化簡後可以得知 $pq=25$ 。再在 BC 上取點 N 使得 $MN\perp BC$。則有 $\dfrac{MN}{CD}=\dfrac{BN}{BC}$ 及 $\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{CN}{BC}$ ，故知 $\dfrac{MN}{CD}+\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{BN}{BC}+\dfrac{CN}{BC}=1$，此即 $\dfrac{MN}{5+q}+\dfrac{MN}{5+p}=1$ ，化簡後可得

$$MN(10+p+q)=(5+p)(5+q)=25+pq+5p+5q=5(10+p+q) ，$$

因此可推知 $MN=5$ ，即△BMC 的面積為 25，所以△ADM 的面積為 25。

答： 25

12.設 $a>0$，若關於 x、y、z 的三元方程組 $\begin{cases} x+2y+3z=a \\ xy+xz+2yz=2 \end{cases}$ 有實數解，則 a 的最小值為__________。

【參考解法】

可知 $x+2y=a-3z$ 且 $xy=2-xz-2yz=2-z(x+2y)=2-z(a-3z)$ 。接著再利用算幾不等式可以推出 $(x+2y)^2\ge 8xy$ ，故有

$$(a-3z)^2\ge 8(2-z(a-3z))$$
$$a^2-6az+9z^2\ge 16-8az+24z^2$$
$$0\ge 15z^2-2az-a^2+16$$

因原方程組有實數解，故知這一個關於 z 的函數的判別式大於或等於 0，即有

$$(2a)^2-60(16-a^2)\ge 0$$
$$a^2-15(16-a^2)\ge 0$$
$$16a^2\ge 15\times 16$$
$$a^2\ge 15$$

再因 $a>0$，故知 $a\ge\sqrt{15}$ 。

當 $a=\sqrt{15}$ 時，有 $15z^2-2\sqrt{15}z+1\le 0$，即 $(\sqrt{15}z-1)^2\le 0$，因此 $z=\dfrac{1}{\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ ；

此時方程組為$\begin{cases} x+2y=\dfrac{4}{5}\sqrt{15} \\ xy=\dfrac{6}{5} \end{cases}$，解此方程組可得$\begin{cases} x=\dfrac{2}{5}\sqrt{15} \\ y=\dfrac{\sqrt{15}}{5} \end{cases}$，

即方程組$\begin{cases} x+2y+3z=\sqrt{15} \\ xy+xz+2yz=2 \end{cases}$的解為$x=\dfrac{2}{5}\sqrt{15}$、$y=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$、$z=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$。

答：$\sqrt{15}$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在 3×3 的方格表的正中央的小方格內填入數 9，然後在邊緣的八個小方格內不重複地填入數 1～8，使得在角落的每個 2 × 2 子方格表的四個小方格內的數之和都相等。若將旋轉、翻轉視為相同，則共有__________組不同的解。

例

4	6	5
2	9	1
7	3	8

是其中一解，

4	5	6
2	9	1
7	3	8

不是。

【參考解法】

不妨令各方格所填入的數如下圖所示：

a	b	c
d	9	e
f	g	h

且在角落的每個 2×2 子方格表的四個小方格內的數之和都是 S+9，則有

$$\begin{aligned} 4S &= (a+b+d)+(b+c+e)+(d+f+g)+(e+g+h) \\ &= 36+b+d+e+g \\ S &= 9+\frac{b+d+e+g}{4} \end{aligned}$$

故可知$b+d+e+g$必為 4 的倍數，10=1+2+3+4$\le b+d+e+g\le$5+6+7+8=26，

故$b+d+e+g$=12、16、20 或 24。又可知$9+3=12\le S\le 9+6=15$。

若$S=12$，則$b+d+e+g=12$，此時$1+2+3+6$、$1+2+4+5$可滿足：

(i) $1+2+3+6$：

不妨令$b=6$，若$d=3$，則$a=3$，矛盾；若$e=3$，則$c=3$，矛盾。故可判斷出$g=3$，此時由題意可知有以下這一組解：

4	6	5
2	9	1
7	3	8

(ii) $1+2+4+5$：

不妨令$b=5$，若$d=2$，則$a=5$，矛盾；若$e=2$，則$c=5$，矛盾。故可判斷出$g=2$。此時由對稱性可假設$d=1$、$e=4$，因此$f=9$，矛盾，故知此時無解；

	5	
1	9	4
9	2	

若 $S=13$，則 $b+d+e+g=16$，此時 $1+2+5+8$、$1+2+6+7$、$1+3+4+8$、$1+3+5+7$、$1+4+5+6$、$2+3+4+7$、$2+3+5+6$ 可滿足：

(i) $1+2+5+8$：

不妨令 $b=8$，可直接判斷出 $g=5$。此時由對稱性可假設 $d=1$、$e=2$，此時由題意可知有以下這一組解：

4	8	3
1	9	2
7	5	6

(ii) $1+2+6+7$：

不妨令 $b=7$，可直接判斷出 $g=6$。此時由對稱性可假設 $d=1$、$e=2$，因此 $f=6$，矛盾，故知此時無解：

	7	
1	9	2
6	6	

(iii) $1+3+4+8$：

不妨令 $b=8$，若 $d=1$，則 $a=4$，矛盾；若 $e=1$，則 $c=4$，矛盾。故可判斷出 $g=1$。此時由對稱性可假設 $d=3$、$e=4$，因此 $c=1$，矛盾，故知此時無解：

	8	1
3	9	4
	1	

(iv) $1+3+5+7$：

不妨令 $b=7$，若 $d=5$，則 $a=1$，矛盾；若 $e=5$，則 $c=1$，矛盾。故可判斷出 $g=5$。此時由對稱性可假設 $d=1$、$e=3$，因此 $c=3$，矛盾，故知此時無解：

	7	3
1	9	3
	5	

(v) $1+4+5+6$：

不妨令 $b=6$，若 $d=1$，則 $a=6$，矛盾；若 $e=1$，則 $c=6$，矛盾。故可判斷出 $g=1$。此時由對稱性可假設 $d=4$、$e=5$，此時由題意可知有以下這一組解：

3	6	2
4	9	5
8	1	7

(vi) $2+3+4+7$：

不妨令 $b=7$，若 $d=2$，則 $a=4$，矛盾；若 $e=2$，則 $c=4$，矛盾。故可判斷出 $g=2$。此時由對稱性可假設 $d=3$、$e=4$，因此 $a=3$，矛盾，故知此時無解：

3	7	
3	9	4
	2	

(vii)　$2+3+5+6$：

不妨令$b=6$，若$d=5$，則$a=2$，矛盾；若$e=5$，則$c=2$，矛盾。故可判斷出$g=5$。此時由對稱性可假設$d=2$、$e=3$，因此$a=5$，矛盾，故知此時無解：

5	6	
2	9	3
	5	

若$S=14$，則$b+d+e+g=20$，此時$1+4+7+8$、$1+5+6+8$、$2+3+7+8$、$2+4+6+8$、$2+5+6+7$、$3+4+5+8$、$3+4+6+7$可滿足：

(i)　$1+4+7+8$：

不妨令$b=8$，可直接判斷出$g=7$。此時由對稱性可假設$d=1$、$e=4$，此時由題意可知有以下這一組解：

5	8	2
1	9	4
6	7	3

(ii)　$1+5+6+8$：

不妨令$b=8$，可直接判斷出$g=6$。此時由對稱性可假設$d=1$、$e=5$，因此$a=5$，矛盾，故知此時無解：

5	8	
1	9	5
	6	

(iii)　$2+3+7+8$：

不妨令$b=8$，可直接判斷出$g=7$。此時由對稱性可假設$d=2$、$e=3$，因此$c=3$，矛盾，故知此時無解：

	8	3
2	9	3
	7	

(iv)　$2+4+6+8$：

不妨令$b=8$，可直接判斷出$g=6$。此時由對稱性可假設$d=2$、$e=4$，因此$a=4$，矛盾，故知此時無解：

4	8	
2	9	4
	6	

(v)　$2+5+6+7$：

不妨令$b=7$，若$d=2$，則$a=5$，矛盾；若$e=2$，則$c=5$，矛盾。故可判斷出$g=2$。此時由對稱性可假設$d=5$、$e=6$，因此$a=2$，矛盾，故知此時無解：

2	7	
5	9	6
	2	

(vi)　$3+4+5+8$：

不妨令 $b=8$，若 $d=3$，則 $a=3$，矛盾；若 $e=3$，則 $c=3$，矛盾。故可判斷出 $g=3$。此時由對稱性可假設 $d=4$、$e=5$，此時由題意可知有以下這一組解：

2	8	1
4	9	5
7	3	6

(vii)　$3+4+6+7$：

不妨令 $b=7$，若 $d=3$，則 $a=4$，矛盾；若 $e=3$，則 $c=4$，矛盾。故可判斷出 $g=3$。此時由對稱性可假設 $d=4$、$e=6$，因此 $a=3$，矛盾，故知此時無解：

3	7	
4	9	6
	3	

若 $S=15$，則 $b+d+e+g=24$，此時 $3+6+7+8$、$4+5+7+8$ 可滿足：

(i)　$3+6+7+8$：

不妨令 $b=8$，可直接判斷出 $g=7$。此時由對稱性可假設 $d=3$、$e=6$，此時由題意可知有以下這一組解：

4	8	1
3	9	6
5	7	2

(ii)　$4+5+7+8$：

不妨令 $b=8$，可直接判斷出 $g=7$。此時由對稱性可假設 $d=4$、$e=5$，因此 $f=4$，矛盾，故知此時無解：

	8	
4	9	5
4	7	

綜上所述，共有 6 組解：(除第一組外，每組正確解給 3 分，全對 20 分)

4	6	5
2	9	1
7	3	8

4	8	3
1	9	2
7	5	6

3	6	2
4	9	5
8	1	7

5	8	2
1	9	4
6	7	3

2	8	1
4	9	5
7	3	6

4	8	1
3	9	6
5	7	2

2. 已知一個五位數 $\overline{abcde}$ 是由五個相異的數碼 1、3、5、7、9 所組成（但不一定依此順序），已知它的前兩位數 $\overline{ab}$ 與末兩位數 $\overline{de}$ 之乘積減去中間的數 c 恰好等於一個各位數碼都相同的四位數。請問滿足上述條件的最大五位數是什麼？

【參考解法 1】

由條件可以得知 $\overline{ab}\times\overline{de}-c\le 93\times 75-1=6974$ 且 $\overline{ab}\times\overline{de}-c$ 恆為偶數，故 $\overline{ab}\times\overline{de}-c$ 只可能是 2222、4444 或 6666 (5 分)。而 $\overline{ab}\times\overline{de}$ 可能的值為：

2222+1=2223、2222+3=2225、2222+5=2227、2222+7=2229、2222+9=2231、4444+1=4445、4444+3=4447、4444+5=4449、4444+7=4451、4444+9=4453、6666+1=6667、6666+3=6669、6666+5=6671、6666+7=6673、6666+9=6675，其中 4447、4451、6673 為質數，故不予考慮。

若 $c=9$，此時 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 71\times 53=3763$，即 $\overline{ab}\times\overline{de}=2231$；此時由個位數為 1 可知 b、e 必其中一數為 3、一數為 7，故知 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 17\times 53=901$，故不合；(2 分)

若 $c=7$，此時 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 91\times 53=4823$，即 $\overline{ab}\times\overline{de}=4451$ 或 2229：

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=4451$，此時由個位數為 1 可知 b、e 必其中一數為 7、另一數為 3，故不合；

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=2229$，此時由個位數為 9 可知 b、e 必其中一數為 1、另一數為 9，但 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 51\times 39=1989$，故不合；(2 分)

若 $c=5$，此時 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 91\times 73=6643$，即 $\overline{ab}\times\overline{de}=4449$ 或 2227：

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=4449$，此時由個位數為 9 可知 b、e 必其中一數為 1、另一數為 9，但 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 71\times 39=2769$，故不合；

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=2227$，此時由個位數為 7 可知 b、e 必其中一數為 3、另一數為 9 或一數為 1、另一數為 7：

若 b、e 一數為 3、另一數為 9，但 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 73\times 19=1387$，故不合；

若 b、e 一數為 1、另一數為 7，但 $\overline{ab}\times\overline{de}\ge 31\times 97=3007$，故不合；(2 分)

若 $c=3$，此時 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 91\times 75=6825$，即 $\overline{ab}\times\overline{de}=6669$、4447 或 2225：

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=6669$，此時由個位數為 9 可知 b、e 必一數為 1、另一數為 9，但 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 71\times 59=4189$，故不合；

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=4447$，此時由個位數為 7 可知 b、e 必其中一數為 1、另一數為 7，但 $\overline{ab}\times\overline{de}\ge 51\times 97=4947$，故不合；

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=2225$，此時由個位數為 5 可知 b、e 必一數為 5，但 $95\times 71=6745$、$95\times 17=1615$、$75\times 91=6825$、$75\times 19=1425$、$15\times 97=1455$、$15\times 79=1185$，故不合；(2 分)

若 $c=1$，此時 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 93\times 75=6975$，即 $\overline{ab}\times\overline{de}=6667$、4445 或 2223：

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=6667$，此時由個位數為 7 可知 b、e 必一數為 3、另一數為 9，故知 $\overline{ab}\times\overline{de}\le 73\times 59=4307$，故不合；(2 分)

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=4445$，此時由個位數為 5 可知 b、e 必一數為 5，但 $95\times 73=6935$、$95\times 37=3515$、$75\times 93=6975$、$75\times 39=2925$、$35\times 97=3395$、$35\times 79=2765$，

若 $\overline{ab}\times\overline{de}=2223$，此時由個位數為 3 可知 b、e 必一數為 7、另一數為 9，而 $57\times 39=2223$，即有 $57\times 39-1=2222$，故知 39157、57139 皆滿足題意，其最大值為 57139。(5 分)

【參考解法 2】

可令 $\overline{ab}\times\overline{de}-c=(10a+b)(10d+e)-c=1111x$，而

$$(10a+b)(10d+e)-c\equiv(-a+b)(-d+e)-c\ (\mathrm{mod}\ 11)\ (5\text{ 分})$$

故 $(-a+b)(-d+e)-c\equiv1111x\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 11)$，即 $c\equiv(ae+bd)-(ad+be)\ (\mathrm{mod}\ 11)$。

而在模 11 之下，可得下表：(5 分)

$c=1$	$3\times5+7\times9\equiv1$	$3\times7+5\times9\equiv0$	$3\times9+5\times7\equiv8$
$c=3$	$1\times5+7\times9\equiv2$	$1\times7+5\times9\equiv8$	$1\times9+5\times7\equiv0$
$c=5$	$1\times3+7\times9\equiv0$	$1\times7+3\times9\equiv1$	$1\times9+3\times7\equiv8$
$c=7$	$1\times3+5\times9\equiv4$	$1\times5+3\times9\equiv10$	$1\times9+3\times5\equiv2$
$c=9$	$1\times3+5\times7\equiv5$	$1\times5+3\times7\equiv4$	$1\times7+3\times5\equiv0$

可知其中僅 $c=1$ 時，同一列中會有兩數之差恰為 $c=1$ 的情況：$3\times5+7\times9\equiv1$ 與 $3\times7+5\times9\equiv0$，故可判斷 $\overline{ab}$、$\overline{de}$ 為 39 與 57，或是 75 與 93(5 分)。分別代回驗算，可知 $75\times93-1=6974$ 的四個數碼不相同，故不合；而 $57\times39-1=2222$，滿足題意。因此可能的五位數有 57139、39157，其最大值為 57139。(5 分)

【參考解法 3】

可令 $\overline{ab}\times\overline{de}-c=(10a+b)(10d+e)-c=1111x$，而

$$(10a+b)(10d+e)-c\equiv(-a+b)(-d+e)-c\ (\mathrm{mod}\ 11)\ (5\text{ 分})$$

故知 $(-a+b)(-d+e)-c\equiv1111x\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 11)$，即 $c\equiv(b-a)(e-d)\ (\mathrm{mod}\ 11)$。

因 a、b、c、d、e 是由五個相異的數碼 1、3、5、7、9 所組成，故知其中任兩個數碼之差恆為小於或等於 8 的偶數。故現觀察在模 11 之下，小於或等於 8 的偶數之積，如下表：

	2	4	6	8
2	4	8	1	5
4	╳	5	2	10
6	╳	╳	3	4
8	╳	╳	╳	9

若 $c=1$，則有 $1\equiv2\times6\ (\mathrm{mod}\ 11)$，故知僅 $1\equiv(7-5)\times(9-3)\ (\mathrm{mod}\ 11)$ 滿足，此時若取 $a=5$、$b=7$、$d=3$、$e=9$ 可得一個五位數 57139；若取 $a=3$、$b=9$、$d=5$、$e=7$ 可得一個五位數 39157；(2 分)

若 $c=3$，則有 $3\equiv6\times6\ (\mathrm{mod}\ 11)$，但此時其餘四個數碼 1、5、7、9 中，僅 7 與 1 之差為 6，故 $3\equiv6\times6\ (\mathrm{mod}\ 11)$ 無法成立；(2 分)

若 $c=5$，則有 $3\equiv4\times4\equiv2\times8\ (\mathrm{mod}\ 11)$，但此時其餘四個數碼 1、3、7、9 中，僅 7 與 3 之差為 4，故 $3\equiv4\times4\ (\mathrm{mod}\ 11)$ 無法成立；僅 9 與 1 之差為 8，但 7 與 3 之差為 4，故 $3\equiv2\times8\ (\mathrm{mod}\ 11)$ 無法成立；(2 分)

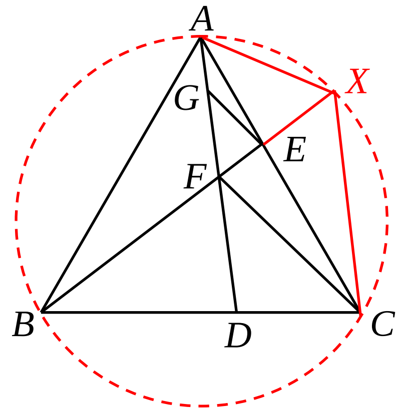
若 $c=7$，則由表中沒有 7 可知無法成立；(2 分)

若 $c=9$，則有 $3\equiv8\times8\ (\mathrm{mod}\ 11)$，但此時其餘四個數碼 1、3、5、7 中，沒有任何一對數之差為 8，故 $3\equiv8\times8\ (\mathrm{mod}\ 11)$ 無法成立。(2 分)

因此可能的五位數有 57139、39157，其最大值為 57139。(5 分)　　答：57139

3. 如下圖，在正三角形 ABC 中，點 D、E 分別為邊 BC、AC 上的點，並且滿足 $CD=AE$。設 BE 與 AD 交於點 F，連接 CF，過點 E 作 CF 的平行線交 AD 於點 G，請證明 $AG=FE$。

【參考解法 1】



由 $AB=AC$、$CD=AE$ 及 $\angle BAE=\angle ACD$，可得知 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$，即有 $\angle CAD=\angle ABE$。作 $\triangle ABC$ 的外接圓，並延長 BE 交 $\triangle ABC$ 的外接圓於點 X，再連結 CX、AX，如圖所示，則此時有

$$\begin{aligned}\angle AFX &= \angle ABE+\angle BAD\\ &= \angle CAD+\angle BAD\\ &= \angle CAB\\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

由同一弧的圓周角相等知 $\angle FXC=\angle BAC=60^\circ$，

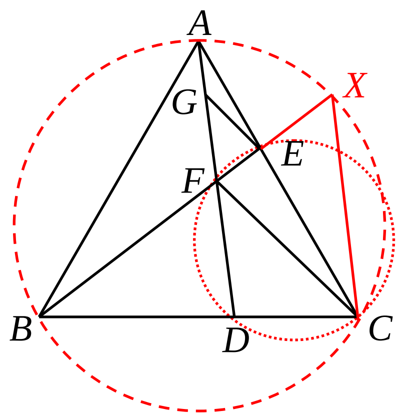
故 $\angle AFX=\angle FXC$，因此 $AD//XC$，即有 $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{XE}{EF}$(5 分)；

再因 $\angle AXF=\angle ACB=60^\circ$，故知 $\triangle AFX$ 是正三角形，即 $AF=XF$(5 分)；

因 $GE//FC$，故知 $\dfrac{FG}{GA}=\dfrac{CE}{EA}$，即知 $\dfrac{FG}{GA}=\dfrac{XE}{EF}$(5 分)；

再因 $AF=XF$，故可推知 $FG=XE$ 及 $GA=EF$ (5 分)。

【參考解法 2】



如圖，作 $\triangle ABC$ 的外接圓，並延長 BE 交 $\triangle ABC$ 的外接圓於點 X，再連結 CX。

因 $\angle CBX=\angle EBC$、$\angle BXC=\angle BAC=60^\circ=\angle ECB$，

故可得知 $\triangle BCX\sim\triangle BEC$，即有 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BC}{BX}$，故可得

$BC^2=BE\times BX$。(5 分)

再由圓冪定理可得知 $BE\times EX=AE\times EC$，故有

$$\begin{aligned}BE^2 &= BE\times(BX-EX)\\ &= BE\times BX-BE\times EX\\ &= BC^2-AE\times EC\\ &= AC^2-AE\times EC\\ &= AE^2+AE\times EC+EC^2\\ &= CD^2+CD\times BD+BD^2\end{aligned}$$

(5 分) 因 $CD=AE$、$AC=AB$、$\angle ACD=\angle BAE$，故知 $\triangle ACD\cong\triangle BAE$，即有 $\angle ADC=\angle AEF$、$AD=BE$；再因 $\angle DAC=\angle EAF$，可得 $\triangle ADC\sim\triangle AEF$，即有 $\angle ACD=\angle AFE$、$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AF}$，因此 $\angle ACD+\angle EFD=\angle AFE+\angle EFD=180^\circ$，故得知 D、F、E、C 四點共圓，所以再由圓冪定理可得知

$$\begin{aligned} BF \times BE &= BD \times BC \\ &= BD \times (BD + CD) \\ &= BD^2 + BD \times CD \end{aligned}$$

故有 $BE^2 = CD^2 + CD \times BD + BD^2 = CD^2 + BF \times BE$ ，即

$$\begin{aligned} CD^2 &= BE^2 - BF \times BE \\ &= BE(BE - BF) \\ &= BE \times EF \end{aligned}$$

故知 $AE^2 = AD \times EF$ ；(5 分)

再因 $GE//FC$，故知 $\dfrac{AE}{AG} = \dfrac{AC}{AF}$ ，即

$$AE = \frac{AG \times AC}{AF}$$

$$\begin{aligned} AE^2 &= AG \times AC \times \frac{AE}{AF} \\ &= AG \times AC \times \frac{AD}{AC} \\ &= AG \times AD \end{aligned}$$

因此可得 $AG \times AD = AE^2 = AD \times EF$ ，即 $AG = EF$ 。(5 分)