注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN** ccmp@seed.net.tw

# 2010 年青少年數學國際城市邀請賽

## 參賽代表遴選決賽個人賽試題

**編 號:______ 縣市：______ 校 名:_________ 姓 名:________ 性別:□ 男 □ 女**

**作答時間: 二 小 時**

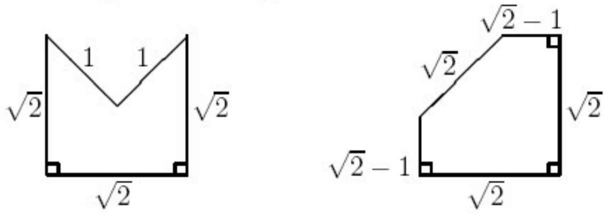
第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不需列出計算過程)

1. $\left[\sqrt{2010\times2009\times2008\times2007+1}-(2008)^2\right]^{2010}$ 的個位數字為__________。
   Ans: 9

2. 某地區學生若干人參加數學競賽，每個學生得分都是整數且分數均不相同，他們的總得分共計為 1632，其中前七名的分數分別是 100，95，90，85，82，78，70，而最低分數是 40 分，則該地區學生得分高於 60 分(包括前七名)至少有幾位?__________
   Ans: 8

3. 若將左下圖分割成 $k$ 小塊後，再重新拼成右下圖，則 $k$ 的最小值為_______。
   Ans:2



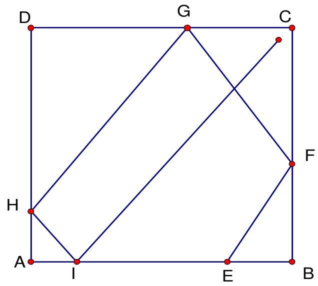

4. 若 $n$ 是大於 $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^6$ 的最小整數，則 $n$ 之值為__________。
   Ans: 2366

5. 若 $a_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}$（有 $n$ 個根號）。若正整數 $k$ 滿足 $k(3-a_n)>3-a_{n-1}$，則 $k$ 的最小值為__________。 Ans:6

6. 在 $(1+x)+(1+2x)^2+(1+3x)^3+....+(1+99x)^{99}$ 的展開式中，$x$ 的係數是_______。
   Ans: 328350

7. $\left(1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\cdots+\left(1+\frac{1}{19^2}+\frac{1}{20^2}-\frac{1}{95}\right)^{\frac{1}{2}}$ 之值為__________。
   Ans: $18\frac{1}{20}$

8. 邊長為 12 的正方形 $ABCD$，點 $E$ 在 $AB$ 邊上，線段 $EB$ 長為 3，一個小粒子自 $E$ 點射向 $BC$ 邊，擊中 $BC$ 邊上一點 $F$ 後，再依入射角等於反射角的方式進行反射；接著擊中 $CD$ 邊上一點 $G$，反射後擊中 $AD$ 邊上一點 $H$；再接著反射後擊中 $AB$ 邊上一點 $I$，最後，反射後擊中 $C$ 點，如右圖所示。令線段 $BF$ 的長為 $\alpha$，小粒子從點 $E$ 移動至點 C 所經過整個路徑長為 $\beta$，則 $\alpha+\beta=$_________



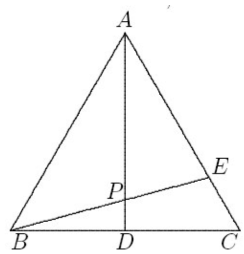

Ans: 49

9. 設 $n$ 為大於 1910 的正整數，且使得 $\dfrac{n-1910}{2010-n}$ 為完全平方數，則所有可能的 $n$ 值相加之和為__________。

Ans:7958

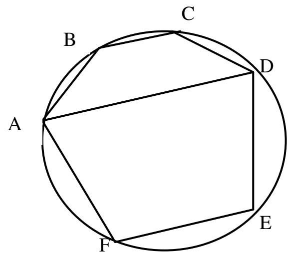
10. 若某個月與它的前一個月及後一個月星期四的天數均一樣多，且此月與它的後一個月的星期三天數一樣多，則該月的第二個星期二為該月的第__________號。
Ans: 12 號。

11. 如右圖，$\triangle ABC$是邊長為2的等邊三角形，一線經過點$B$交高$AD$於點$P$，交邊$AC$於點$E$，已知$AP=AE$，則$PD$的長為___________。




Ans: $2-\sqrt{3}$.

12. 如圖，一圓內接六邊形中，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=3$，且 $\overline{AF}=\overline{FE}=\overline{ED}=5$，則 $\overline{AD}=$____________。

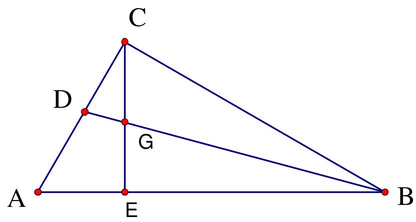



Ans: $\dfrac{360}{49}$

## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 如圖，$\triangle ABC$ 為一直角三角形，$\angle A = 60°$、$\angle B = 30°$、$\angle C = 90°$，$\angle B$ 的角平分線交 $A$ 邊於 $D$ 點，自 $C$ 作垂線 $CE$ 垂直於邊 $AB$，交線段 $BD$ 於 $G$ 點。 已知線段 $AC$ 長為 1，則線段 $BG$ 長為何？




【參考解答】

自 $D$ 作垂線 $DH$ 垂直於邊 $AB$。

$D$ 在$\angle B$ 的角平分線上 $\Rightarrow DH = DC$

$CE = \sqrt{3}/2$，$AE = 1/2$，$BE = 3/2$。

設 $x = DC = DH$，$\triangle AHD$ 相似於$\triangle AEC$，$DH/AD = EC/AC$

$\Rightarrow x/(1\text{-}x) = \sqrt{3}/2 \quad \Rightarrow 2x = \sqrt{3}(1 - x)$

$\Rightarrow x = \sqrt{3}/(2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$

$\triangle BCD$ 爲一直角三角形

$\Rightarrow BD = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} - 3)^2} = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}}$ 。

又$\triangle AHD$ 相似於$\triangle AEC$， $HE/AE = DC/AC$

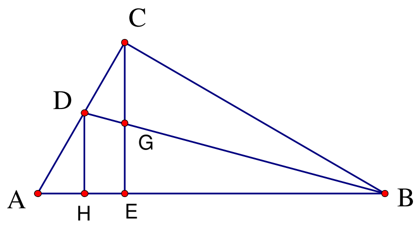
$\Rightarrow 2HE = (2\sqrt{3} - 3) \quad \Rightarrow HE = (2\sqrt{3} - 3)/2$

$\triangle BGE$ 相似於$\triangle BDH$，

$\Rightarrow BG/BD = BE/BH = BE/(BE+EH)$

$$BG = BD \times BE/(BE+EH) = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} \div [(2\sqrt{3} - 3)/2 + \frac{3}{2}]$$

$$\Rightarrow BG = \frac{3}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$



2. 令 $f(x)=ax^2+bx+c$ ，其中 $abc\neq 0$ ，若 $f(2x)=0$ 與 $f(3x)=0$ 有相同的非零實數根，則 $\dfrac{ac}{b^2-2ac}$ 之值為何？

【參考解答】

$f(2x)=4ax^2+2bx+c$ ， 設 $x_1$ 及 $x_2$ 為其二根，令 $x_1\le x_2$

$$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2-2ac}{4a^2}$$

$$\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}=\frac{c}{4a}\times\frac{4a^2}{b^2-2ac}=\frac{ac}{b^2-2ac}$$

$$f(2x)=(x-x_1)(x-x_2)$$

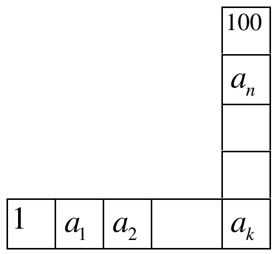
$$f(3x)=\left(\frac{3}{2}x-x_1\right)\left(\frac{3}{2}x-x_2\right)=\frac{9}{4}\left(x-\frac{2}{3}x_1\right)\left(x-\frac{2}{3}x_2\right)$$

$\because x_1\le x_2$ $\therefore$ 一定為 $x_1=\dfrac{2}{3}x_2$ 故 $3x_1=2x_2$

$$\frac{ac}{b^2-2ac}=\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}=\frac{6}{13}$$

3. 在 $10\times 10$ 的 100 個方格中，分別填上從 1 到 100 這 100 個正整數，證明從這 100 個方格中，必能找出兩個相鄰的正整數，使這兩個數的差不小於 5。(柳賢）

【參考解答】




令 1 和 100 在方格中的位置如右圖:

假設方格中任何兩個相鄰的正整數其差皆小於 5；

則 $a_1-1<5$ …..(1)

$a_2-a_1<5$ ……(2)

……….

$a_n-a_{n-1}<5$ …. (n)

$100-a_n<5$ … (n+1)

把 n+1 個不等式相加, 可得 $99<5(n+1)$ ;

從右圖中可得 $n$ =17 代入上式而有 $99<5(17+1)\Rightarrow 99<90$,顯然矛盾.

故必能在方格中找出兩個相鄰的正整數，使這兩個數的差不小於 5。