

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2011 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽 個人賽試題

編號:_____ 縣市:_____ 校名:_____

姓名:_____ 性別: ☐ 男 ☐ 女

作答時間: 二 小 時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請將答案直接填入各題預留空白處, 不需列出計算過程)

作答時間: 二 小 時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請將答案直接填入各題預留空白處, 不需列出計算過程)

1. 設 $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$; 此二函數交互運算的形式為
 $f(x) = x^2, g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)^4 = x^8, f(g(f(x))) = f(x^8) = x^{16}, \dots$;
若經過 f 的 100 次及 g 的 99 次相互運算後答案為 $f(g(\dots(f(g(f(x)))))) = x^n$,
則 n 之值為_____。 Ans: $n = 2^{298}$

2. 設一數列的第一項為 2, 第二項為 3, 第三項為 9, 第四項為 23, 第五項為 48, 第六項為 87, 若依此規律性排列, 則該數列的第八項為_____。

Ans: 219

3. 從 1 到 125 的正整數中, 問最多可從這 125 個數取出多少個數, 使得取出的數中, 任意兩個數的和均不為 11 的倍數? _____ Ans: 60 個

4. 設 x, y 為正整數, 若滿足 $x^2 - y^2 = 512$ 的所有解 (x, y) 中, 當 x 為最大值時, $y =$ _____。

Ans: 127

5. 一矩形 ABCD 中, 邊 AB 之長為 18, 邊 BC 之長為 6, 將矩形摺起來, 使兩

對頂點 A 與 C 重合, 則摺痕之長為 _____。 Ans: $\sqrt{40}$ (或 $2\sqrt{10}$)

6. 設 M 為 2011 位正整數，它是由 1 開始的正整數依次寫下去，一直寫到第 2011 位為止，即 123456789101112……，則這個數 M 被 9 除的餘數是_____。

Ans: 8

7. 設 a 和 b 為任意實數，則

$$\sqrt{a^2 + (b-1)^2} + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-1)^2 + b^2} + \sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$$

的最小值為_____。

Ans: $5 + \sqrt{2}$

8. 設 $N = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 42^2 - 41^2$ ，則 N 的最大質因數為_____。

Ans: 47

9. 設 a_1 及 a_2 為數線上的兩點，其坐標分別為 0 及 2010，令其值和為

$S_1 = a_1 + a_2 = 0 + 2010$ ；然後在線段 $\overline{a_1 a_2}$ 中取四等分點，由左至右分別為 a_3 、

a_4 、及 a_5 ，令其值和為 $S_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ；之後再分別於 $\overline{a_1 a_3}$ 中取四

等分點， $\overline{a_3 a_4}$ 中取四等分點， $\overline{a_4 a_5}$ 中取四等分點，及 $\overline{a_5 a_2}$ 中取四等分點，再

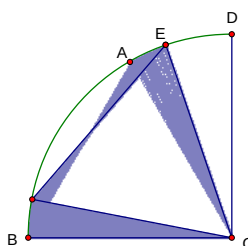
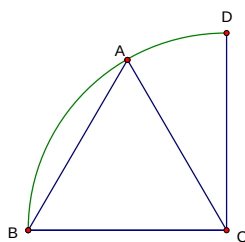
令此 17 個點座標值和為 S_3 ；依此下去，則 S_5 之值為_____。

Ans: 258285

10. 已知長方形 $ABCD$ 恰可分成七個形狀大小相同的小長方形(如右下圖)，如果小長方形的面積是 3，則長方形 $ABCD$ 的周長為_____。 Ans: 19

11. 四邊形 $ABCD$ 中， AB 邊平行 DC 邊，且 $DC = 2AB$ ， $\angle ADC = 30^\circ$ ， $\angle BCD = 50^\circ$ ；設 M 為 CD 邊的中點，求 $\angle AMB$ 的度數為_____。 Ans: 100

12. 設 $\triangle ABC$ 為一正三角形，其邊長為 4。今將 $\triangle ABC$ 置於半徑長為 4 的四分之一圓內，如下左圖所示。若將頂點 A 依順時針方向沿著圓周繞到 D 點。則左圖中的四分之一圓形區域沒有被 $\triangle ABC$ 三邊掃到的區域面積為_____。
(例如：當頂點 A 移到 E 點，深色部分為三角形三邊掃過的區域，如下右圖所示。)

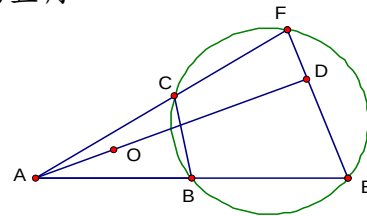


Ans: $\frac{7\pi}{3} - 16\sqrt{3} + 24$

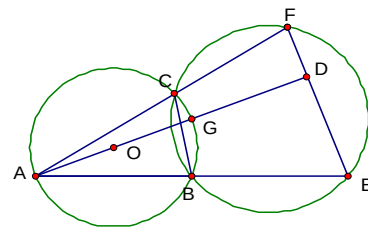
第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，過 B, C 兩點任作一圓分別與 AB, AC 的延長線交於 E, F ；
若 AO 延長線交線段 EF 於 D ，求證 $\angle ADF$ 為直角。



【參考解答】聯結 AO 並延長分別交
圓 O 、 EF 于點 G 、 D ，聯結 CG ，
易知 $\angle AED = \angle ACB$ ，
 $\angle BAG = \angle BCG$ ， $\angle ACG = 90^\circ$
則 $\angle AED + \angle EAD = \angle ACB + \angle BCG = \angle ACG = 90^\circ$
因此 $\angle ADF$ 為直角。



2. 已知一直角三角形的兩股長均為整數，且滿足方程式 $x^2 - (m+2)x + 4m = 0$ ，
試求 m 值及此直角三角形的三邊長。

【參考解答】

設直角三角形的兩股長分別為正整數 a, b ，則 $a + b = m + 2$ ， $ab = 4m$ 推得 m 為正整數

$\therefore$ 方程式 $x^2 - (m+2)x + 4m = 0$ 有兩個整數解

$\Rightarrow$ 判別式 $\Delta = m^2 - 12m + 4$ 必為完全平方數

$\therefore$ 設 $m^2 - 12m + 4 = k^2$ (k 為正整數)

$\Rightarrow m^2 - 12m + 4 - k^2 = 0$ 也應有整數解

$\Rightarrow$ 判別式 $\Delta = 4(32 + k^2)$ 是一完全平方數

$\therefore$ 再設 $32 + k^2 = (k+n)^2$ (n 為正整數)

$\therefore n$ 與 $2k+n$ 同奇同偶

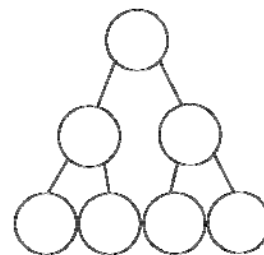
$$\therefore \begin{cases} n=2 \\ 2k+n=16 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} n=4 \\ 2k+n=8 \end{cases} \Rightarrow k=7 \text{ or } k=2$$

所以，

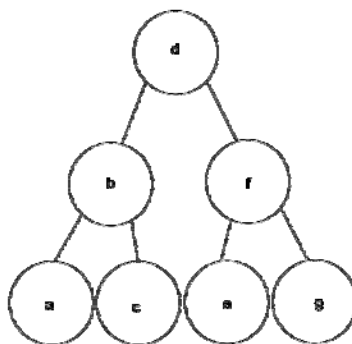
當 $k=7$ 時， $m=15$ ，直角三角形的三邊長為 5、12、13

當 $k=2$ 時， $m=12$ ，直角三角形的三邊長為 6、8、10

3. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 七個數字填入下圖的七個圓形中，數字不重複使用，且每個圓形中的數字比其左下方那個圓的數字大，比其右下方那個圓的數字小(最下方的四個圓因底下無圓，故無此限制)。求共有幾種填入的方法。



【參考解答】



假設七個數字分別為 a 至 g 。

可知 a, b, c 三個數、 e, f, g 三個數與 a, b, d, f, g 五個數皆為遞增的關係。

因 a, b, d 為遞增，可先得知 d 不小於 3。

因 d, f, g 為遞增，可先得知 d 不大於 5。

- (1) 若 d 為 3，則 a 與 b 必定為 1 與 2。剩下四個數字取出一個填至 c ，另外三個照大小順序填至 e, f, g 。若 c 被決定了，則 e, f, g 亦被決定。故共有 4 種填法。
- (2) 若 d 為 5，則 f 與 g 必定為 6 與 7。剩下四個數字取出一個填至 e ，另外三個照大小順序填至 a, b, c 。若 e 被決定了，則 a, b, c 亦被決定。故共有 4 種填法。
- (3) 若 d 為 4，剩下六個數字可先取三個照大小順序填至 a, b, c 。剩下三個再照大小順序填至 e, f, g 。其中因 a, b, d 為遞增，故 b 必為 2 或 3。
 若 b 為 2，則 a 為 1，剩下四個數字取出一個填至 c ，另外三個照大小順序填至 e, f, g 。若 c 被決定了，則 e, f, g 亦被決定。故共有 4 種填法。
 若 b 為 3，則 1 與 2 必被填至 a 與 e ，剩下三個數字取出一個填至 c ，另外兩個照大小順序填至 f, g 。若 a, e, c 被決定了，則 f, g 亦被決定。故共有 6 種填法。

因此在三個分類中共有 18 種填法。