

# International Mathematics Tournament of Towns

## 環球城市數學競賽

2001 秋季賽 國中組 初級卷 20 Oct. 2001

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AD}$  平行於  $\overline{BC}$ ，點  $K$  是  $\overline{AB}$  上的點。分別由點  $A$  作直線  $L_1$  平行於  $\overline{KC}$ ；由點  $B$  作直線  $L_2$  平行於  $\overline{KD}$ 。試證：直線  $L_1$  與  $L_2$  之交點落在  $\overline{CD}$  上。(四分)
2. 小華計算自然數中最前面  $n$  個數之乘積 ( $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ )；小英計算最前面  $m$  ( $m \geq 2$ ) 個正偶數之乘積 ( $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2m$ )，二人算完之後，他們發現所計算出的答案竟然相同。試證：他們二者之中一定有人算錯了。(四分)
3. 小凱有 4 個外觀相同的錢幣，小明告訴小凱說這 4 個錢幣中有二個是真的、二個是假的。已知每個真幣的重量都相等，每個假幣的重量也都相等，而且一個真幣比一個假幣重。試問：小凱能不能最多只用天平稱兩次，就確定小明說的話到底對不對（也就是說確定小凱的 4 個錢幣到底是不是恰好有二枚真幣二枚假幣）？(四分)(註：天平無法顯示刻度)
4. 在一條東西向的直線上有 10 個相同的球，它們之間的距離都是 1 單位。起初最左邊的 5 個球向右移動，最右邊的 5 個球向左移動，已知這 10 個球移動的速度都相同，而且當每次兩個球相互碰撞時，它們都以原來的速度反彈回去。試問：這些球最多總共碰撞了多少次？(四分)
5. 在平面上有  $n$  個點 ( $n \geq 4$ )。已知從這些點中除去任意一個點後，剩下的點分別會對某條直線成對稱形狀。試問：原來的這  $n$  個點是否也必須對某條直線成對稱形狀？(四分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》

# International Mathematics Tournament of Towns

## 環球城市數學競賽

2001 秋季賽 高中組 初級卷 20 Oct. 2001

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 五邊形的高是從頂點到對邊所作的垂線；五邊形的中線是從頂點到對邊中點所作的線段。假若有一個五邊形的五條高和五條中線這 10 條線段的長度全都相等。試證：這個五邊形是正五邊形（即所有的邊長及所有的內角都相等）。（四分）
2. 已知  $1001!+2, 1001!+3, \dots, 1001!+1001$  這 1000 個連續正整數之中沒有質數。試問：是否存在 1000 個連續正整數，它們之中恰有五個質數？（四分）
3. 在一條東西向的直線上有 10 個相同的球，它們之間的距離都是 1 單位。起初最左邊的 5 個球向右移動，最右邊的 5 個球向左移動，已知這 10 個球移動的速度都相同，而且當每次兩個球相互碰撞時，它們都以原來的速度反彈回去。試問：這些球最多總共碰撞了多少次？（四分）
4. 在一塊薄正方形蛋糕頂面上鋪有一些兩兩互不相交的三角形巧克力片。試問：是否保證一定可以將這個蛋糕切成外形為凸多邊形的小塊蛋糕，使得每一小塊中都恰好包含有一塊完整的三角形巧克力片？（四分）  
（註：連接多邊形內任意二點之線段若仍全部落在多邊形之內部，則稱此多邊形為凸多邊形。）
5. 將  $8 \times 8$  方格表的橫列由下至上分別標記為 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8；直行由左至右分別標記為 a, b, c, d, e, f, g, h，並在方格表的 (a, 1) 中放置一個紅色的棋子、在 (a, 2) 中放置一個黑色的棋子及在 (b, 1) 中放置一個白色的棋子。每一次可以移動任意一個棋子，每個棋子的走法是沿著方格表的同一行或同一列移動，它可以移動任意多格但是不能越過其它棋子，而且在每次移動後，要求任一個棋子所在的同一行或同一列上都必須有另外一個棋子。試問：在移動有限次後，能不能使得在這個  $8 \times 8$  方格表中，紅色的棋子停在 (h, 8)、黑色的棋子停在 (g, 8)、白色的棋子停在 (h, 7)？（四分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》