

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2016 小學數學競賽選拔賽初賽試題

第二試：應用題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分

1. 請問將個位數碼與十位數碼都是偶數的所有二位數相加所得之和是多少？

【參考解法 1】

個位數碼與十位數碼都是偶數的所有二位數相加所得之和為：

$$\begin{aligned} & (20 + 22 + 24 + 26 + 28) + (40 + 42 + 44 + 46 + 48) + (60 + 62 + 64 + 66 + 68) + \\ & (80 + 82 + 84 + 86 + 88) \\ & = 20 \times 5 + (2 + 4 + 6 + 8) + 40 \times 5 + (2 + 4 + 6 + 8) + 60 \times 5 + (2 + 4 + 6 + 8) + \\ & 80 \times 5 + (2 + 4 + 6 + 8) \\ & = (20 + 40 + 60 + 80) \times 5 + 4 \times (2 + 4 + 6 + 8) \\ & = 54 \times (2 + 4 + 6 + 8) \\ & = 54 \times 20 \\ & = 1080 \end{aligned}$$

【參考解法 2】

個位數碼與十位數碼都是偶數的所有二位數相加所得之和為：

$$\begin{aligned} & (20 + 40 + 60 + 80) + (22 + 42 + 62 + 82) + (24 + 44 + 64 + 84) + (26 + 46 + 66 + 86) + \\ & (28 + 48 + 68 + 88) \\ & = (20 + 40 + 60 + 80) + (20 + 40 + 60 + 80 + 4 \times 2) + (20 + 40 + 60 + 80 + 4 \times 4) + \\ & (20 + 40 + 60 + 80 + 4 \times 6) + (20 + 40 + 60 + 80 + 4 \times 8) \\ & = 200 + 208 + 216 + 224 + 232 \\ & = 1080 \end{aligned}$$

答：1080

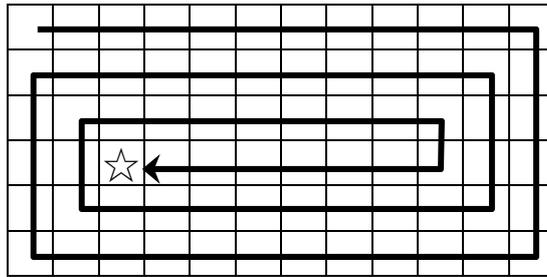
2. 在 50 張紙牌上分別各標記一個連續偶數：2、4、6、8、10、...、100，每張卡片上的數都互不相同。請問至少要從中抽出幾張卡片才能使得剩下的卡片上的數之總和恰好等於 2016？

【參考解法】

可知從 2 開始的連續 50 個偶數之和為 $\frac{(2+100) \times 50}{2} = 2550$ ，故抽出的卡片上的數之和為 $2550 - 2016 = 534$ 。要使抽出的卡片張數最少，我們抽出卡片上的數要儘量大，所以可抽走 100、98、96、94、92、54 等至少六張卡片。

答：6 張

3. 在如下圖的 6×12 方格表中，從左上角開始，往右沿著邊框逐格塗色至右邊框，再由上往下逐格塗色至底邊框，再沿著底邊框由右往左逐格塗色至左邊框，再由下往上逐格塗色至碰到已塗色的方格，再繼續往右一直螺旋式地塗色，直到所有的方格都塗上顏色為止。表中☆為最後一個塗上顏色的方格，其位置是在由上往下數的第 4 列、由左往右數的第 3 行。



若在一張 1008×2016 的方格表中，依此方式塗色，請問最後一個塗上顏色的方格所在位置，其由上往下數的列數與由左往右數的行數之和是多少？

【參考解法】

可觀察出每塗完一圈，就會有 2 行與 2 列被塗色完畢。在 6×12 方格表中，因 $6 = 2 \times 3$ ，故畫 3 圈即可將此 6×12 方格表塗滿，且在最後一圈所塗的 2×8 方格表中，最後一個所塗的小方格位於左下角，此方格實際的位置為由上往下數的第 4 列、由左往右數的第 3 行。

在 1008×2016 方格表中，因 $1008 = 2 \times 504$ ，故可知畫 504 圈即可將此 1008×2016 方格表塗滿，且最後一圈為塗在中間的 2×1010 方格表，且最後一個被塗上顏色的方格位於此 2×1010 方格表的左下角，因此知其位置是由上往下數的第 $504 + 1 = 505$ 列、由左往右數的第 504 行，故所求之和為 $505 + 504 = 1009$ 。

答：1009

4. 有兩個小數的整數部分都是 14，且小數點後都只有一位數，若將這兩個小數相乘之乘積經過四捨五入後所得之值為 217.5，請問這兩個小數相乘之乘積的準確值是多少？

【參考解法】

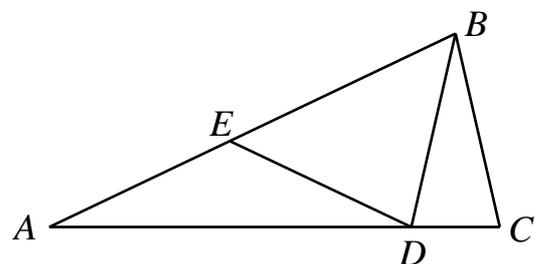
可知這兩個小數都小於 15，且因 $217.5 \div 15 = 14.5$ ，故可得知這兩個小數為 14.6、14.7、14.8 或 14.9。因兩數之乘積經過四捨五入後的值為 217.5，故可得知這兩個小數的乘積之取值至少為 217.45、至多為 217.54。實際將可能的取值直接計算可得：

\times	14.6	14.7	14.8	14.9
14.6	213.16	214.62	216.08	217.54
14.7		216.09	217.56	219.03
14.8			219.04	220.52
14.9				222.01

故這兩個小數為 14.6 與 14.9，其乘積為 217.54。

答：217.54

5. 在銳角三角形 ABC 中，已知 $AB = AC$ 。若在 AB 、 AC 上分別存在點 E 、 D 使得 $BC = BD = DE = EA$ ，如圖所示，請問 $\angle BDE$ 的角度為多少度？



【參考解法】

因 $DE = EA$ ，故 $\angle BAC = \angle EDA$ ，即可得知 $\angle BED = \angle BAC + \angle EDA = 2\angle BAC$ ；

因 $BD = DE$ ，故 $\angle BED = \angle DBE = 2\angle BAC$ ，即可得知

$\angle BDC = \angle BAC + \angle DBE = 3\angle BAC$ ；

因 $BC = BD$ ，故 $\angle BCD = \angle BDC = 3\angle BAC$ ；

因 $AB = AC$ ，故 $\angle ABC = \angle BCD = 3\angle BAC$ ；

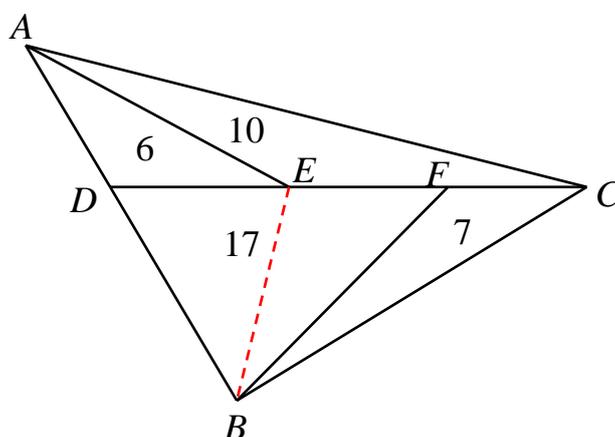
因 $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 7\angle BAC = 180^\circ$ ，故 $\angle BAC = \frac{180^\circ}{7}$ 。

此時即可得知

$$\begin{aligned}\angle BDE &= 180^\circ - \angle BDC - \angle EDA \\ &= 180^\circ - \angle BCD - \angle BAC \\ &= 180^\circ - 4\angle BAC \\ &= 180^\circ - \frac{4}{7} \times 180^\circ \\ &= \frac{3}{7} \times 180^\circ = \frac{540^\circ}{7} = 77\frac{1}{7}^\circ\end{aligned}$$

$$\text{答：} \frac{3}{7} \times 180^\circ = \frac{540^\circ}{7} = 77\frac{1}{7}^\circ$$

6. 如圖所示，已知三角形 AED 的面積為 6 cm^2 、三角形 AEC 的面積為 10 cm^2 、三角形 BDF 的面積為 17 cm^2 、三角形 BCF 的面積為 7 cm^2 ，請問三角形 BEF 的面積為多少 cm^2 ？



【參考解法 1】

連 BE ，可知 $EC : DE = 10 : 6$ ，故三角形 BCE 的面積為 $(17 + 7) \times \frac{10}{10 + 6} = 15 \text{ cm}^2$ ，

因此三角形 BEF 的面積為 $15 - 7 = 8 \text{ cm}^2$ 。

【參考解法 2】

連 BE ，三角形 BCD 的面積為 $17 + 7 = 24 \text{ cm}^2$ ，可知 $AD : DB = 16 : 24 = 2 : 3$ 。同理知三角形 ADE 的面積：三角形 BDE 的面積 = $2 : 3$ 。由此可知三角形 BDE 的面積為 $6 \times \frac{3}{2} = 9 \text{ cm}^2$ ，因此三角形 BEF 的面積為 $17 - 9 = 8 \text{ cm}^2$ 。

答： 8 cm^2

7. 小明在計算機上僅按數字鍵「0」、「8」與運算鍵「+」，這三個鍵所按的次數不必相同，順序也不固定，最後小明所得的值恰好為 20162016。請問小明至少按了幾次數字鍵「8」？

【參考解法】

此相當於找出利用 8、80、800、8000、80000、800000、8000000 之間的加法運算來表示 20162016。因 $20162016 \div 8 = 2520252$ ，由於要按最少次「8」，可得知 $20162016 = 8000000 \times 2 + 800000 \times 5 + 80000 \times 2 + 8000 \times 0 + 800 \times 2 + 80 \times 5 + 8 \times 2$

$$= (8000000 + 8000000) + (800000 + 800000 + 800000 + 800000 + 800000) + (80000 + 80000) + (800 + 800) + (80 + 80 + 80 + 80 + 80) + (8 + 8)$$

所以至少需按 $2 + 5 + 2 + 0 + 2 + 5 + 2 = 18$ 次數字鍵「8」。

答：18 次

8. 將平面上的一個圓用兩條互相垂直的直徑分個成四個部分，在每一部分內塗上紅、黃、藍之一種顏色，且每種顏色都至少被使用一次。若在平面上經過旋轉(不得翻轉)會使圓內所塗的顏色對應相同則視為相同的塗色方法。請問總共有多少種不同的塗色方法？

【參考解法 1】

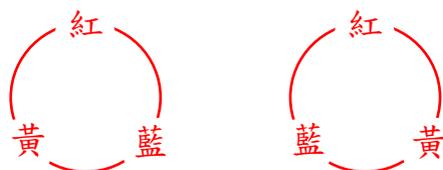
因三個顏色都有，故可判斷知僅一個顏色塗二個部分、其餘二種顏色各塗一部份的情況。若塗二個部分的顏色為紅色，則有以下三種塗法：



塗二個部分的顏色為黃色、藍色時，也都分別有三種塗法，故知共有 $3 \times 3 = 9$ 種不同的塗色方法。

【參考解法 2】

因三個顏色都有，這三種顏色的排列有[紅、藍、黃]、[紅、黃、藍]兩種：



現加入重複的顏色。當重複的顏色為紅色時其排列有[紅、紅、藍、黃]、[紅、紅、藍、黃]與[紅、藍、紅、黃]三種：



同理當重複的顏色為藍色、黃色時，其排列也各有三種，故共有 $3 \times 3 = 9$ 種不同的塗色方法。

答：9 種

9. 有一群神木的樹齡總和為 124457 年，其中樹齡最大的不超過 2163 年、最小的不低於 2000 年，而樹齡相同的神木都各不超過 3 顆。若在這群神木中每棵的樹齡都是整數年，請問至少有多少棵神木樹齡不低於 2016 年？

【參考解法】

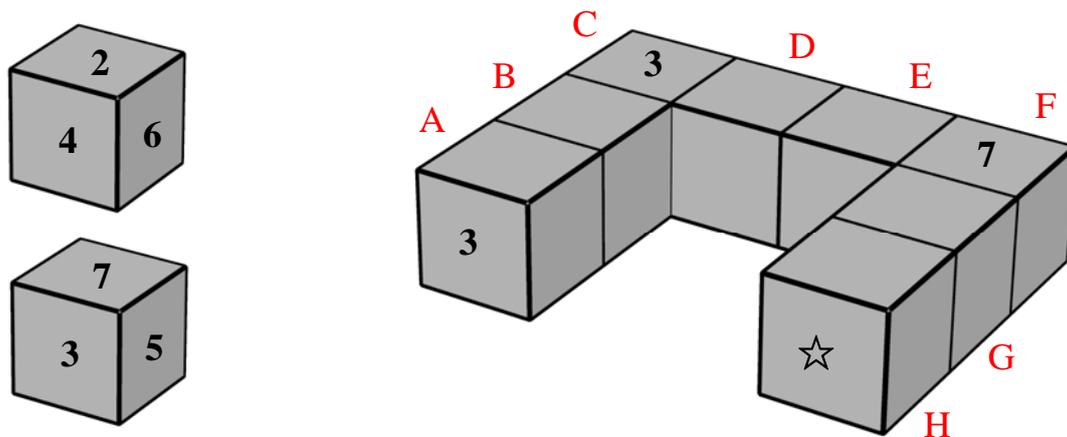
因為神木樹齡總和固定，可判斷出當樹齡小於 2016 年的神木愈多，樹齡不低於 2016 年之神木棵數愈少。故知當樹齡 2000~2015 年的神木都各有 3 棵時，樹齡不低於 2016 年的神木最少。此時樹齡 2000~2015 年的神木樹齡總和為

$$3 \times (2000 + 2001 + 2002 + 2003 + \cdots + 2015) = 96360 \text{ 年，}$$

因此知樹齡不低於 2016 年的神木樹齡總和應該為 $124457 - 96360 = 28097$ ，且由 $2016 \times 13 = 26208 < 28097 < 2163 \times 13 = 28119$ 可以判斷出樹齡不低於 2016 年的神木至少有 13 棵。例如樹齡為 2000~2015 與 2160~2163 年的神木各 3 棵，以及 1 棵樹齡為 2159 年的神木。因此至少有 13 棵神木樹齡不低於 2016 年。

答：13 棵

10. 如下左圖所示，將正方體的六個面都分別寫上 2、3、4、5、6、7 中的一個數，每個數都恰被寫上一次，且相對的兩個面上的數之和都是 9。這樣的正方體共有八個，且將這八個正方體排成如下右圖的形狀，並使得兩個彼此重合的面上的兩個數之和為 10。若有些面上的數標記如下右圖中所示，請問標記☆的面上的數是什麼？



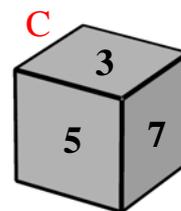
【參考解法】

依序標記正方體 A、B、C、D、E、F、G、H。

在正方體 A 中，3 的相對面上之數為 $9 - 3 = 6$ ，故正方體 B 與正方體 A 重合的面上之數為 $10 - 6 = 4$ ；

在正方體 B 中，4 的相對面上之數為 $9 - 4 = 5$ ，故正方體 C 與正方體 B 重合的面上之數為 $10 - 5 = 5$ ；

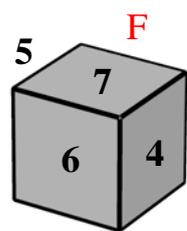
在正方體 C 中，因已知頂面上的數為 3，且正方體 C 與正方體 B 重合的面上之數為 5，故可判斷出與正方體 D 重合的面上之數為 7，因此正方體 D 與正方體 C 重合的面上之數為 $10 - 7 = 3$ ；



在正方體 D 中，3 的相對面上之數為 $9 - 3 = 6$ ，故正方體 E 與正方體 D 重合的面上之數為 $10 - 6 = 4$ ；

在正方體 E 中，4 的相對面上之數為 $9-4=5$ ，故正方體 F 與正方體 E 重合的面上之數為 $10-5=5$ ；

在正方體 F 中，因已知頂面上的數為 7，且正方體 F 與正方體 E 重合的面上之數為 5，故可判斷出與正方體 G 重合的面上之數為 6，因此正方體 G 與正方體 F 重合的面上之數為 $10-6=4$ ；

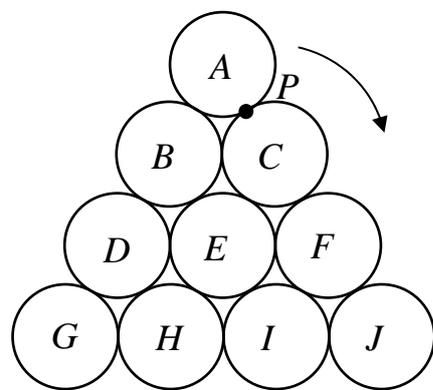


在正方體 G 中，4 的相對面上之數為 $9-4=5$ ，故正方體 H 與正方體 G 重合的面上之數為 $10-5=5$ ；

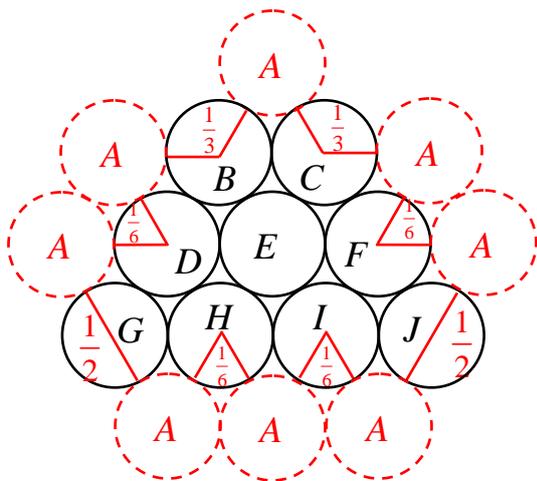
在正方體 H 中，5 的相對面上之數為 $9-5=4$ ，即標記☆的面上的數是 4。

答：4

11. 有十個大小完全相同的圓互相相切且排列成三角形狀，如右圖所示。其中圓 B、C、D、E、F、G、H、I、J 都固定不動，圓 A 緊貼著圓 C、F、J、I、H、G、D、B 順時針方向滾動，滾動過程中不發生任何滑動。當圓 A 上的點 P 第一次滾回原出發時，請問點 P 繞圓 A 的圓心旋轉了多少圈？



【參考解法】



如上圖，透過觀察可知圓 A 繞圓 C 時，移動了 $\frac{1}{3}$ 圈，接

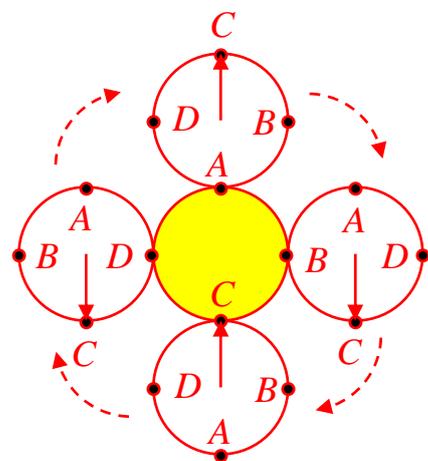
著繞圓 F 時，移動了 $\frac{1}{6}$ 圈，接著繞圓 J 時，移動了 $\frac{1}{2}$ 圈，

繼續繞圓 I、H、G、D、B 時，依序移動了 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、

$\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{6}$ 而回到了出發點 P，而一個圓以此方式移動時，

因所有的圓大小都相同，故由右圖可知點 P 繞圓 A 的圓心旋轉的圈數為移動的圈數之 2 倍，即知共旋轉了

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) \times 2 = \frac{7}{3} \times 2 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} \text{ 圈。}$$



答： $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ 圈

12. 在圓周上填寫四個數 2、0、1、6，每次操作都將圓周上兩個相鄰的數中間寫上它們的和，因此經過第一次操作後圓周上有八個數：2、2、0、1、1、7、6、8。經過第六次操作後圓周上總共有 256 個數。請問圓周上這 256 個數之總和是多少？

【參考解法】

觀察可知每次操作後所填入的數之和會是操作前圓周上所有數之和的 2 倍，由此即可得知每次操作後所有的數之和會是操作前圓周上所有數之和的 3 倍，故當經過第六次操作後，圓周上所有的數之和是 $(2+0+1+6) \times 3^6 = 6561$ 。

答：6561