

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2002 秋季賽 國中組 初級卷 20 Oct. 2002

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在 2002 個邊的凸多邊形內畫上一些對角線，這些對角線在多邊形內部兩兩互不相交，且將這個多邊形分割為 2000 個三角形。請問在這 2000 個三角形中，是否可能恰有 1000 個三角形，其三個邊都是取自於所畫的對角線？
（註：連接多邊形內任意二點之線段，若仍全部落在多邊形之內部，則稱此多邊形為凸多邊形。）（四分）
2. 三個聰明的國中生聚在一起玩一個推理的遊戲。小強與小花各選了一個自然數並分別將它告訴小安。小安告訴小強和小花，他將分別把這二個數的和與乘積寫在不同的紙上。小安寫好後，將其中一張紙藏起來，把另一張紙亮出來給小強和小花看（這張紙上寫著 2002）。小安請小強和小花互猜對方所選的數，小強首先宣稱他無法確定小花所選的數，小花聽完小強的話後，也說她無法確定小強所選的數。請問小花所選的數為何？（五分）
3. (a) 在一次考試中，已知至少有三分之二的題目屬於難題。在這些難題中，每一道題至少有三分之二的學生不會作。請問下列情況是否可能發生：至少答對三分之二題數的學生人數不少於全部考生人數的三分之二。（一分）
(b) 承(a)，若將其中所有的“三分之二”換成“四分之三”呢？（二分）
(c) 承(a)，若將其中所有的“三分之二”換成“十分之七”呢？（二分）
4. 將 2002 張卡片分別標記 $1, 2, 3, \dots, 2002$ 的數，數字面朝上放在桌上。二位玩家輪流自桌上各取一張牌，直到桌上的牌取光為止。先計算每個人所有取的牌的數之總和，再比較這兩個總和的個位數，較大者為勝方。請問兩位玩家中哪一位有必勝之策略（無論對手如何對應）？如果有，這個必勝策略是什麼？（五分）
5. 任意給一個角及其內部一點 A。請問能否畫出三條經過 A 點的直線，使得其中一條線與這個角的兩邊相交的二點，分別是另外二條直線與這個角的同一邊上交點的中點？（五分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2002 秋季賽 高中組 初級卷 20 Oct. 2002

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 三個聰明的國中生聚在一起玩一個推理的遊戲。小強與小花各選了一個自然數並分別將它告訴小安。小安告訴小強和小花，他將分別把這二個數的和與乘積寫在不同的紙上。小安寫好後，將其中一張紙藏起來，把另一張紙亮出來給小強和小花看（這張紙上寫著 2002）。小安請小強和小花互猜對方所選的數，小強首先宣稱他無法確定小花所選的數，小花聽完小強的話後，也說她無法確定小強所選的數。請問小花所選的數為何？（四分）
2. (a) 在一次考試中，已知至少有三分之二的題目屬於難題。在這些難題中，每一道題至少有三分之二的學生不會作。請問下列情況是否可能發生：至少答對三分之二題數的學生人數不少於全部考生人數的三分之二。（一分）
(b) 承(a)，若將其中所有的“三分之二”換成“四分之三”呢？（二分）
(c) 承(a)，若將其中所有的“三分之二”換成“十分之七”呢？（二分）
3. 平面有兩兩不平行的直線若干條，它們將平面分割成許多區域。從這些區域的內部任選一點 A。請證明：如果存在一個點 B，對於任意一條直線而言，點 B 都與點 A 不在這條直線的同一側，則點 A 所在的區域是一個無界的區域（即這個區域至少有一個方向沒有邊界）；反之亦成立。（五分）
4. 設 x, y, z 為實數，且 $0 < x, y, z < \pi/2$ ，請證明：
$$\frac{x \cos x + y \cos y + z \cos z}{x + y + z} \leq \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3}.$$
（五分）
5. 在黑板上任意寫出一個 n 位數，再依下列方法操作：將黑板上的數加上這個 n 位數中的任意一個非零的數字，得到一個新的數寫在黑板上，再擦去黑板上舊有的數。請證明：照這樣的方法繼續操作下去，經過有限次後，黑板上一定會出現一個偶數。（五分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》