婆　什　迦　羅

婆什迦羅 (Bhāskara) 1114 年生於印度南部的比杜爾 (Vijayapura)； 約1185 年卒於印度烏賈因 (Ujjain))。 數學、 天文學。

婆 什 迦 羅

陳 一 心

(湖南科學技術出版社)

婆什迦羅 (Bhāskara) 1114 年生於印度南部的比杜爾 (Vijayapura)；約1185 年卒於印度烏賈因 (Ujjain)。數學、天文學。

婆什迦羅的父親是正統的婆羅門教徒，曾寫過一本很流行的占星術著作。婆什迦羅長期在烏賈因 (Ujjain) 工作，是烏賈因天文台主持人。

從印度數學的發展來看，到十二世紀已經積累了相當多的成果。婆什迦羅通過吸收和改進這些成果，並加以進一步研究，其成就又高出前人一籌。他在文學上的造詣也很深，其著作顯示出較高的詩作技巧。

婆什迦羅的著作至少有六種：

(1)《麗羅娃提》(*Līlāvatī*)；

(2)《算法本源》(*Bījagaṇita*)；

(3)《天文系統極致》(*Siddhāntaśiromaṇi*，寫於 1150 年)；

(4)《關於天文系統極致的研究》(*Vāsanābhāsya on the Siddhāntaśiromaṇi*)；

(5)《探索珍奇》(*Karaṇakutūhala*，寫於 1183 年)；

(6)《關於拉納的 < 錫亞赫迪達坦羅 > 的註釋》(*Vivaraṇa on the Śhishyadhividdhidatantra of Lalla*)。

有人認爲《麗羅娃提》和《算法本源》是《天文系統極致》的兩個部分。還有一本叫《比卻帕納亞》(Bījopanaya 的譯音) 的書，是否爲婆什迦羅的著作，尚無定論。

《麗羅娃提》和《算法本源》是兩部重要的數學著作，代表著 1000 − 1500 年間印度數學的最高水準。婆什迦羅編了來自婆羅摩笈多和施里德哈勒 (Sridhara) 等數學家的問題，並填補了他的前輩著作中的許多不足。

關於書名“麗羅娃提”，流行著一個故事，婆什迦羅的女兒名叫麗羅娃提，由占卜得知，她結婚後將有災禍降臨。按照婆什迦羅的計算，如果婚禮在某一時辰舉行，災禍便可以避免。到了那天，正當新娘等待著“時刻杯”中的水平面下落時，一顆珍珠不知什麼原因從她的頭飾上掉下來，堵在杯孔上，水不再流出了，從而無法測定出準確的時辰，婚禮沒能如期舉行。婚後不久，麗羅娃提便失去了丈夫。爲了安慰她，婆什迦羅教她算術，並以她的名字命名自己的著作。

《麗羅娃提》分爲 13 章，從一個信徒向神祈禱開始展開全書。第 1 章給出了幾個計算表；第 2 章講述整數和分數運算，包括計算平方根和立方根，使用了十進制記數法；第 3 章介紹算術中的反演法、試位法等技巧；第 4 章講解來自希臘和中國的應用問題；第 5 章給出某些算術級數的求和法；第 6 − 11 章是幾何學，主要講面積和體積的計算和可以化爲一次方程的實際問題；第 12 章講述不定方程；第 13 章涉及組合學的內容。《算法本源》主要是關於代數的，由八章組成。第 1 章講述正負數法則。第 2 − 3 章講整係數一次和二次不定方程的解法；第 4 章講線性方程組；第 5 章研究二次方程，並給出勾股定理的兩個證明；第 6 章包含一些線性不定方程組的實例；第 7 − 8 章補充了二次不定方程的內容。

印度人對代數學的一大貢獻是採用縮寫文字和符號來表示未知數和運算，婆什迦羅上述兩本書就是這方面的代表作。書中給出了零的運算法則，有 $a+0=a$、$a-0=a$、$a\times 0=0$、$\sqrt{0}=0$，等等。但他給出的 $(a/0)\times 0=a$ 是錯誤的。值得注意的是，在

《算法本源》中，婆什迦羅引入了一個樸素粗糙的無窮大概念。他寫道：“一個數除以零便成爲一個分母是符號 0 的分數。例如 3 除以 0 得 3/0。這個分母是符號 0 的分數，稱爲無窮大量。在這個以符號 0 作爲分母的量中，可以加入或取出任何量而無任何變化發生，就像在世界毀滅或創造世界的時候，那個無窮的、永恆的上帝沒有發生任何變化一樣，雖然有大量的各種生物被吞沒或產生出來。”婆什迦羅在天文學研究中還得出 $\frac{a\times 0}{b\times 0}=\frac{a}{b}$，這已經進入無窮小運算的領域了。婆什迦羅的幾何工作主要以婆羅摩笈多的工作爲基礎。例如

$$\text{球的表面積} = 4\times \text{圓面積},$$

$$\text{球的體積} = \text{球的表面積}\times\frac{1}{6}\ \text{直徑},$$

等等。在《麗羅娃提》中還有許多直角三角形和相似三角形問題，例如：

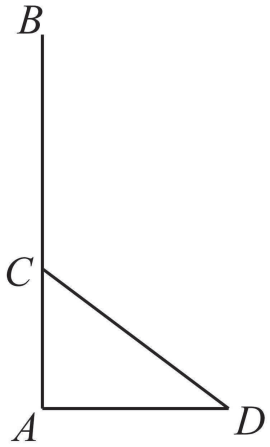


圖 1

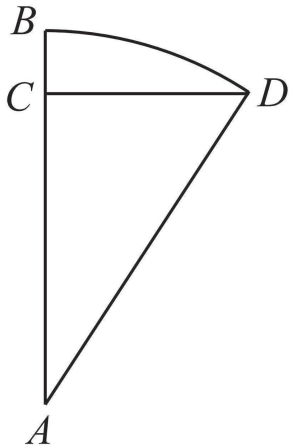


圖 2

(1) 直立在地面上的一支長 32 腕尺 (腕尺爲印度古代一種量度單位，即從肘至中指端之長，約 18－22 英吋) 的竹子被風吹折，其末端在距根部 16 腕尺處觸地，問折斷後的竹高爲多少?

解：如圖 1，竹高 $= AB = 32$，$AD = 16$，C 爲竹折斷之點。若 $AC = x$，則 $BC = CD = 32 - x$。故 $x^2 + 16^2 =$

$(32-x)^2$，$x=12$。

(2) 一朵荷花露出水面 1 掌尺 ($=\frac{1}{2}$ 腕尺)，被風吹倒，在距原露出點 2 腕尺遠處沒於水中。問池中水深多少？

解：如圖 2，$AB=$ 荷花長，$AC=$ 水深，故 $BC=\frac{1}{2}$。

若 $AC=x$，則 $AB=AD=x+\frac{1}{2}$。故 $(x+\frac{1}{2})^2=x^2+4$，

$x=3\frac{3}{4}$ (腕尺)。與前一問題相類似的題目曾出現在婆羅摩笈多的《不定方程講義》中，可見婆什迦羅受到婆羅摩笈多的影響。值得注意的是，上述兩個問題與中國一世紀時的數學名著《九章算術》"勾股卷" 中的 "葭生池中央"，"折竹" 等問題只是數據不同，似乎同出一源。

《麗羅娃提》給出了平截頭台的體積公式。若上、下底面爲長方形，分別以 a、b 和 a'、b' 爲邊，則該平截頭台的體積 $=\frac{1}{6}\,h[ab+a'b'+(a+a')\,(b+b')]$。它在公元前 1800 年左右便載入古埃及數學著作 "莫斯科紙草書" 中，中國的《九章算術》和婆羅摩笈多的著作也給出了這一公式。

婆什迦羅對排列問題進行了深入的研究，提出定理：r 個元素中，k 個屬於一類，l 個屬於另一類，這 r 個元素的排列數爲 $\frac{r!}{k!l!}$。

希臘人最早發現了不可通約量，但是長期不承認無理數是數。婆什迦羅和其他一些印度數學家打破了無理數與有理數之間的森嚴界限。他們廣泛地使用無理數，在運算中和有理數作同一處理，而兩者之間的鴻溝，似乎置若罔聞。

在《算法本源》中，婆什迦羅比較全面地討論了負數，把負數叫做“負債”或“損失”，並在數碼上加小點來表示。如 $\dot{3}$ 表示 -3。他正確地敍述了負數的運算法則：“正數、負數的平方，常爲正數；正數的平方根有兩個，一正一負；負數無平方根，因爲它不是一個平方數。”

婆什迦羅對一次和二次方程的討論比其他印度數學家詳盡，同時也大大超過了希臘的丟番圖 (Diophantus)。《算法本源》中還有一個三次方程和一個雙二次方程的例子。婆什迦羅承認二次方程有兩個根，但將負根棄去不取。譬如指出 $x = 50$ 和 $x = -5$ 都是 $x^2 - 45x = 250$ 的根，但接著說：“本例的第二值不適宜，故棄去，因爲人們不贊成負根。”

印度傳統的解不定方程的法則 − 庫塔卡法則經婆什迦羅之手也得到改進和推廣。他指出，若 $x = \alpha$、$y = \beta$ 是不定方程 $ax + c = by$ 的解，則 $(\alpha'、\beta')$ 也是該方程的解，這裡 $\alpha' \equiv \alpha (\mathrm{mod}\ b)$，$\beta' \equiv \beta (\mathrm{mod}\ a)$；若 $x = \alpha$、$y = \beta$ 爲 $ax + c = by$ 的一組解，則 $x = \alpha - b$、$y = a - \beta$ 是方程 $ax + by + c = 0$ 的解。

婆什迦羅最有獨創性的工作是他對婆羅摩笈多關於不定方程 $Nx^2 + 1 = y^2$ 解法的改進。改進後的方法稱爲圓過程 (cyclic process)，其內容爲：對任意適合的 K，對 a、b 使得 $Na^2 + K = b^2$，另外，$N \cdot 1^2 + (m^2 - N) = m^2$，在 $(a,\ b,\ K)$ 和 $(1,\ m,\ m^2 - N)$ 間應用婆羅摩笈多引理，可得

$$N\left(\frac{am+b}{K}\right)^2 + \frac{m^2 - N}{K} = \left(\frac{bm + Na}{K}\right)^2 。$$

利用庫塔卡法，選定 m 使 $am + b$ 可被 K 整除，且使 $m^2 - N$ 在數值上是較小的。作

$$\frac{am+b}{K} = a_1、\frac{m^2 - N}{K} = K_1、\frac{bm + Na}{K} = b_1，$$

婆什迦羅指出：若 a_1 爲一整數，b_1 和 K_1 也是整數 (婆什迦羅定理 1)。則可得 $Na_1^2 + K_1 = b_1^2$。以 a_1、b_1、K 替代 a、b、K，重複上述過程，得到另一組整數 a_2、b_2、K，使得 $Na_2^2 + K_2 = b_2^2$。婆什迦羅指出：重複上述過程有限次後，可以得到 $N\alpha^2 + l = \beta^2$，其中 $l = \pm 1$、± 2 或 ± 4(婆什迦羅定理 2)。再按照婆羅摩笈多的解法，可得出原方程 $Nx^2 + 1 = y^2$ 的整數解。對於上述的兩個定理，婆什迦羅沒有給出證明。他比較注重 $Nx^2 + 1 = y^2$ 型方程的應用，用其解更一般的二次方程。

方程 $Nx^2 + 1 = y^2$ 的解法稱爲婆羅摩笈多－婆什迦羅法則，它得到許多數學史家的高度評價。

婆什迦羅在天文學研究中，也對三角學的發展作出了貢獻。在《天文系統極致》第三部分裡，他給出了下面一些三角學公式：

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \text{；}$$

$$\sin \frac{A - B}{2} = \frac{1}{2}[(\sin A + \sin B)^2 + (\cos A - \cos B)^2]^{\frac{1}{2}} \text{；}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} R \text{；}\quad \sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5R^2 - \sqrt{5R^4}}{8}} \text{，}$$

其中 R 爲圓半徑。

在世界數學史上，微積分學經過了漫長而曲折的發展歷程。在微積分學創始人 I. 牛頓 (Newton) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 以前，古希臘數學家阿基米德和中國古代數學家劉徽就在計算面積和體積的法則中，表現出樸素的積分學思想。婆什迦羅也運用類似的法則求球體的表面積和體積。爲了計算球體表面積，婆什迦羅採用兩種方法。第一種方法是用一系列平行圓把表面積分劃成許多基本的圓環，這一系列半徑不同的平行圓是取表面上的任意點作圓心的，平行圓的數目可以任意多。但爲了易於計算，應該有已知的正弦數目那麼多，基本圓環的面積的和便給出球體的表面積。第二種方法是用過球極點的子午圈把球表面分劃成許多基本的

弓形，每一個弓形再被平行於赤道圓的圓圈分劃成許多基本的四邊形。這些四邊形面積的和給出弓形的面積，所有這些弓形面積的和給出球體的表面積。爲了求得球體積，婆什迦羅利用一系列頂點在球心底面在球表面上且其面積爲單位面積的小稜錐，這些稜錐體積的和便給出球的體積。

婆什迦羅在天文學研究中表現出豐富的微分學思想。他爲了準確地掌握行星的運動規律，引入了“瞬時法則”，即把一天分爲許多小的時間間隔，比較行星在相繼時間間隔末的運動位置。若 y 和 y' 是行星在相繼時間間隔末的平均近點距離，婆什迦羅給出

$$\sin y' - \sin y = (y' - y)\cos y$$

但這一成果在印度可能還不算最早的。按照 B.B. 達塔 (Datta) 的說法，印度的門雅那 (Munjala，公元 932 年) 及其著作的評註者卜拉沙斯底達拉 (Prasnastidhara，公元 958 年) 就已悟出了這一結論。

婆什迦羅還得出結論：“行星的運動在哪裡是個極值，在哪裡的運動就將是平穩的。”“在逆行的起始和結尾，行星的明顯運動消失了。”這裡包含了導數在函數的極植處等於零以及羅爾 (Rolle) 定理的概念。

婆什迦羅的其它幾本著作是關於天文學研究的。《天文系統極致》含數理天文學與天體理論兩部分，包括行星的平黃經及眞黃經，與週日運動有關的三問題、朔望、月蝕、日蝕、行星的偕日升落、宇宙結構、行星平均運動原理、行星的離心－周轉圓模型、球面三角學原理、天文儀器等專章。這本著作對印度天文學的發展影響很深。婆什迦羅提出了自己的宇宙理論，認爲地球居於宇宙之中，靠自己的力量固定於空中；他認爲地球上有七重氣，分別推動月亮、太陽和行星運動；並認爲天體視直徑大小的變化是由於它們離開地球遠近不同；他甚至還認識到地球具有引力。《關於天文系統極致的研究》是婆什迦羅自己對《天文系統極致》的註解。《探索珍奇》給出了解天文問題的法則，它們比

《天文系統極致》給出的法則更爲簡單。《關於拉納的〈錫亞赫迪達坦羅〉的註釋》有三本手稿，分別存於貝拿勒斯、比卡內爾和烏賈因，尚未出版。

婆什迦羅的著作在印度有很高的地位。在馬哈拉施特拉邦的巴特那，發現有關於婆什迦羅的一塊重要碑刻。碑文上記載著 1207 年 8 月 9 日當地權貴提供給一個教育機構一筆捐款，這筆捐款是資助學者們研究婆什迦羅著作的 (從研究《天文系統極致》開始)。按照莫臥兒帝國皇帝阿克拔 (Akbar) 的旨意，《麗羅娃提》、《算法本源》等都被譯爲波斯文，這些譯本分別於 1587 年和 1634 年出版。婆什迦羅的嫡孫曾創立了一個專門研究《天文系統極致》的學派，以後的 400 多年間，有許多學者對此書進行了註釋。

文　　獻

原始文獻

[1] Bhāskara II, Līlavatī(Sanskrit text)： 1. *Calcutta*, 1832；2. *With Sanskrit and Hindī commentaries of Laṣaṇd Lāla Jhā*, edited by Sureśa Sarman, as Vidyābhavana Saṃskṛta Granthamālā series, no. 62, Benares, 1961。

[2] H.T. Colebrooke, *Algebra, with arithmetic and mensuration*：*from the sanscrit of Brahmegupta and Bháscara*, London, 1817

[3] Bhāskara II, Bījagaṇita (Sanskrit text)： 1. *Calcutta*, 1834；2. *Edited, with the Bījapallava of Kṛṣṇa*, by T.V. Rādhākṛṣṇa Śāstrin, as Tanjore Sarasvati Mahal Series, no. 78, Tanjore, 1958

研究文獻

[4] David Pingree, *Sanskrit astronomical tables in the United States*, Transactions of the American Philosophical Society, 58(1968), 3, 36－37。

[5] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publisning House, Bombay, 1938。

[6] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, Boston, 1923。

[7] A.K. Bag, *Mathematical in ancient and medieval India*, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, 1979。

[8] А. П. Юшкевича, История математики в средние века, Москва, 1961。

[9] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской Математики, Иэдательство《Наука》, Москва, 1977。

[10] David Pingree, *Bhāskara II*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1976, 115－120。

[11] Brij Mohan, *The terminology of Līlavatī*, Journal of the Oriental Institute, Baroda, 8(1958－1959), 159－168。

[12] D.H. Potts, *Solution of a diophantine system proposed by Bhaskara*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 38(1946), 21－24。

[13] J.F. Scott, *A history of mathematics*, London, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特， 數學史， 商務印書館， 1981)。