李 善 蘭

李善蘭原名心蘭，字竟芳，號秋紉，別號壬叔。浙江海寧人。清嘉慶十五年十二月八日 (1811 年 1 月 2 日) 生；光緒八年十月二十九日 (1882 年 12 月 9 日) 卒於北京。數學、天文學、力學、植物學。

李善蘭之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Li_Shanlan.html

李 善 蘭

王 渝 生

(中國科學院自然科學史研究所)

李善蘭原名心蘭，字竟芳，號秋紉，別號壬叔。浙江海寧人。清嘉慶十五年十二月八日 (1811 年 1 月 2 日) 生；光緒八年十月二十九日 (1882 年 12 月 9 日) 卒於北京。數學、天文學、力學、植物學。

李善蘭出身於讀書世家，其先祖可上溯至南宋末年京都汴梁 (今河南開封) 人李伯翼。伯翼一生讀書論道，不樂仕進。元初，其子李衍舉賢良方正，授朝請大夫嘉興路總管府同知，全家定居海寧縣硤石鎮。五百年來，傳宗接代到十七世孫，名叫李祖烈，號虛谷先生，治經學。祖烈初娶望海縣知縣許季溪的孫女爲妻，不幸許氏早殤；繼娶妻妹塡房，又病故。後續弦崔氏，係名儒崔景遠之女。崔氏生三子：心蘭 (善蘭)、心梅、心葵，並一女。心梅亦通曉數學。李善蘭早年在家鄉娶妻許氏，無子。晚年在北京納妾米氏，仍未得子；乃過繼外甥崔敬昌爲嗣。敬昌字吟梅，曾任江海關文牘。

李善蘭自幼就讀於私熟，受到了良好的家庭教育。他資稟穎異，勤奮好學，於所讀之詩書，過目即能成誦。

九歲時，李善蘭發現父親的書架上有一本中國古代數學名著－《九章算術》，感到十分新奇有趣，從此迷上了數學。

十四歲時，李善蘭又靠自學讀懂了歐幾里得《原本》前六卷，這是明末徐光啓 (1562－1633)、利瑪竇 (M. Ricci，1522－1610) 合譯的古希臘數學名著。歐氏幾何嚴密的邏輯體系，清晰的數學推理，與偏重實用解法和計算技巧的中國古代傳統數學思路迥

異，自有它的特色和長處。李善蘭在《九章算術》的基礎上，又吸取了《原本》的新思想，這使他的數學造詣日趨精深。

幾年後，作爲州縣的生員，李善蘭到省府杭州參加鄉試。因爲他“於辭章訓詁之學，雖皆涉獵，然好之總不及算學，故於算學用心極深”(李善蘭《則古昔齋算學》自序)，結果八股文章做得不好，落第。但他卻毫不介意，而是利用在杭州的機會，留意搜尋各種數學書籍，買回了李冶的《測圓海鏡》和戴震的《勾股割圓記》，仔細研讀，使他的數學水準有了更大提高。

海鹽人吳兆圻《讀疇人書有感示李壬叔》詩中說：“衆流匯一壑，雅志說算術。中西有派別，圓徑窮密率。”“三統探漢法，余者難具悉。余方好茲學，心志窮專一。”許涔祥《硤川詩續鈔》註曰：“秋塍(吳兆圻)承思亭先生家學，於夕桀、重差之術尤精。同里李壬叔善蘭師事之。”看來，李善蘭曾拜吳兆圻爲師，學習過數學。

李善蘭在故里與蔣仁榮、崔德華等親朋好友組織“鴛湖吟社”，常遊“東山別墅”，分韻唱和，其時曾利用相似勾股形對應邊成比例的原理測算過東山的高度。他的經學老師陳奐在《師友淵源記》中說他“熟習九數之術，常立表線，用長短式依節候以測日景，便易稽考”。余楙在《白嶽盦詩話》中說他“夜嘗露坐山頂，以測象緯躔次”。至今李善蘭的家鄉還流傳著他在新婚之夜探頭於閣樓窗外觀測星宿的故事。

1840 年，鴉片戰爭爆發。帝國主義列強入侵中國的現實激發了李善蘭科學救國的思想。他說：“嗚呼！今歐羅巴各國日益強盛，爲中國邊患。推原其故，製器精也，推原製器之精，算學明也。”“異日(中國)人人習算，製器日精，以威海外各國，令震攝，奉朝貢。”(李善蘭《重學》序)從此他在家鄉刻苦從事數學研究工作。

1845 年前後，李善蘭在嘉興陸費家設館授徒，得以與江浙一

帶的學者 (主要是數學家) 顧觀光 (1799－1862)、張文虎 (1808－1885)、汪曰楨 (1813－1881) 等人相識，他們經常在一起討論數學問題。此間，李善蘭有關於“尖錐術”的著作《方圓闡幽》、《孤矢啓秘》、《對數探源》等問世。其後，又撰《四元解》、《麟德術解》等。

1851 年，李善蘭與著名數學家戴煦 (1805－1860) 相識。戴煦於 1852 年稱：“去歲獲交海昌壬叔李君，……緣出予未竟殘稿請正，而壬叔頗賞予餘弧與切割二線互求之術，再四促成，今歲又寄扎詢及，遂謝絕繁冗，扃戶抄錄，閱月乃竟。嗟呼！友朋之助，曷可少哉？”(戴煦《外切密率》自序) 李善蘭與友人在學術上相互切磋，取長補短，他與數學家羅士琳 (1774－1853)、徐有壬 (1800－1860) 也“郵遞問難，常朝覆而夕又至”(崔敬昌《李壬叔徵君傳》)。

1852 年夏，李善蘭到上海墨海書館，將自己的數學著作給來華的外國傳教士展閱，受到偉烈亞力 (A. Wylie，1815－1887) 等人的讚賞，從此開始了他與外國人合作翻譯西方科學著作的生涯。

李善蘭與偉烈亞力翻譯的第一部書，是歐幾里得《原本》後九卷。在譯《原本》的同時，他又與艾約瑟 (J. Edkins，1823－1905) 合譯了《重學》二十卷。其後，還與偉烈亞力合譯了《談天》十八卷、《代數學》十三卷、《代微積拾級》十八卷，與韋廉臣 (A. Williamson，1829－1890) 合譯了《植物學》八卷。以上幾種書均於 1857 至 1859 年間由上海墨海書館刊行。此外，他還與偉烈亞力、傅蘭雅 (J. Fryer) 合譯過《奈端數理》(即牛頓《自然哲學的數學原理》)，可惜沒有譯完，未能刊行。

1860 年，李善蘭在江蘇巡撫徐有壬幕下作幕賓。太平軍佔領蘇州後，他留在那兒的行篋，包括各種著作手稿，散失已盡。從此他“絕意時事”，避亂上海，埋頭從事數學研究，重新著書

立說。其間，他與數學家吳嘉善、劉彝程等人都有過學術上的交往。

1861 年秋，洋務派首領、兩江總督曾國藩 (1811－1872) 在安徽籌建安慶軍械所，並邀著名化學家徐壽 (1811－1884)、數學家華蘅芳 (1833－1902) 入幕。李善蘭也於 1862 年被“聘入戎幄，兼主書局”。他一到安慶，就拿出“印行無幾而板燬”於戰火的《原本》等數學書籍請求曾國藩重印刊行，並推薦張文虎、張斯桂等人入幕。他們同住一處，經常進行學術討論，積極參與洋務新政中有關科學技術方面的活動。

1864 年夏，曾國藩攻陷太平天國首都天京 (今南京)，李善蘭等也跟著到了南京。他再次向曾國藩提出刻印他所譯所著的數學書籍，得到曾國藩的支持和資助，於是有 1865 年金陵刊本《原本》十五卷和 1867 年金陵刊本《則古昔齋算學》二十四卷問世。與此同時 (1866)，在南京開辦金陵機器局的李鴻章 (1823－1901) 也資助李善蘭重刻《重學》二十卷並附《圓錐曲線說》三卷出版。

1866 年，在北京的京師同文館內添設了天文算學館，廣東巡撫郭嵩燾 (1817－1891) 上疏舉薦李善蘭爲天文算學總教習，但李善蘭忙於在南京出書，到 1868 年才北上就任。從此他完全轉向於數學教育和研究工作，直到 1882 年去世。其間所教授的學生“先後約百餘人。口講指畫，十餘年如一日。諸生以學有成效，或官外省，或使重洋”(崔敬昌《李壬叔徵君傳》)，知名者有席淦、貴榮、熊方柏、陳壽田、胡玉麟、李逢春等。晚年，獲得意門生江槐庭、蔡錫勇二人，即致函華蘅芳，稱“近日之事可喜者，無過於此，急欲告之閣下也”。這些人在傳播近代科學特別是數學知識方面都起過重要作用。

李善蘭到同文館後，第二年 (1869) 即被“欽賜中書科中書”(從七品卿銜)，1871 年加內閣侍讀銜，1874 年升戶部主事，加六品卿員外銜，1876 年升員外郎 (五品卿銜)，1879 年加四品卿

銜，1882 年授三品卿銜戶部正郎、廣東司行走、總理各國事物衙門章京。一時間，京師各“名公鉅卿，皆折節與之交，聲譽益噪”(蔣學堅《懷亭詩話》)。但他依然孜孜不倦從事同文館教學工作，並埋頭進行學術著述，1872 年發表《考數根法》，1877 年演算《代數難題》，1882 年去世前幾個月，“猶手著《級數勾股》二卷，老而勤學如此”(崔敬昌《李壬叔徵君傳》)。

李善蘭在數學上的研究成果主要見於其所著《則古昔齋算學》十三種二十四卷和題爲“《則古昔齋算學》十四”的《考數根法》。1867 年刊行的《則古昔齋算學》收錄他二十多年來的各種天算著作，計有《方圓闡幽》一卷 (1845)、《弧矢啓秘》二卷 (1845)、《對數探源》二卷 (1845)、《垛積比類》四卷、《四元解》二卷 (1845)、《麟德術解》三卷 (1848)、《橢圓正術解》二卷、《橢圓新術》一卷、《橢圓拾遺》三卷、《火器眞訣》一卷 (1858)、《對數尖錐變法釋》一卷、《級數回求》一卷、《天算或問》一卷。《考數根法》則發表於 1872 年的《中西聞見錄》第二、三及四號上。李善蘭的其它數學著述還有《測圓海鏡解》、《測圓海鏡圖表》、《九容圖表》、《粟布演草》、《同文館算學課藝》和《同文館珠算金鍼》等多種。

李善蘭的數學成就主要有尖錐術、垛積術、質數論三個方面。

十九世紀四十年代，在近代數學尚未自西方傳入中國的條件下，李善蘭異軍突起，獨闢蹊徑，通過自己的刻苦鑽研，發明尖錐術，具有解析幾何的啓蒙思想，得出了一些重要的積分公式，創立了二次平方根的冪級數展開式，各種三角函數、反三角函數和對數函數的冪級數展開式，各種三角函數、反三角函數和對數函數的冪級數展開式，這是李善蘭也是十九世紀中國數學界最重大的成就。

李善蘭認爲

“元數起於絲髮而遞增之而疊之則成平尖錐；

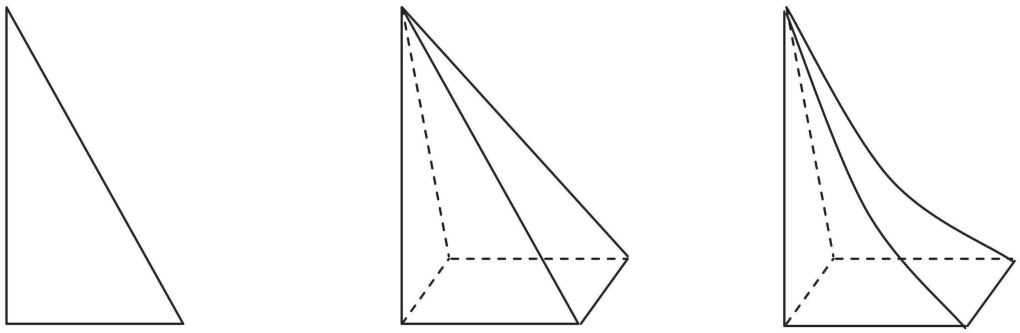
“平方數起於絲髮而漸增之而疊之成立尖錐；

“立方數起於絲髮而漸增之變爲面而疊之則成三乘尖錐；

“三乘方數起於絲髮而漸增之變爲面而疊之成三乘尖錐，……

“從此遞推可至無窮。然則多一乘之尖錐皆少一乘方漸增漸疊而成也。”(李善蘭《方圓闡幽》，以下引文同此)

因此，“諸乘方皆有尖錐”，“三乘以上尖錐之底皆方，惟上四面不作平體，而成凹形。乘愈多，則凹愈甚”(圖 1)。



平尖錐　　立尖錐　　三乘尖錐

圖 1　　尖錐體

“尖錐之算法”，乃是“以高乘底爲實，本乘方數加 1 爲法，除之得尖錐積”。

又，“二乘以上尖錐所疊之面皆可變爲線”，“諸尖錐既爲平面，則可變爲一尖錐”。

這樣，對於一切正整數 n，乘方數 x^n 都可用線段長表示，它們可以積疊成 n 乘尖錐面。這種尖錐面由相互垂直的底線、高線和凹向的尖錐曲線組成。乘數愈多 (即冪次愈高)，尖錐曲線其凹愈甚 (圖 2)。

在《方圓闡幽》中，李善蘭取 $x^2 = 10^{-8}$ 及 $x^2 = 2\times10^{-8}$，用“分離元數法”歸納得出二項平方根展開式

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

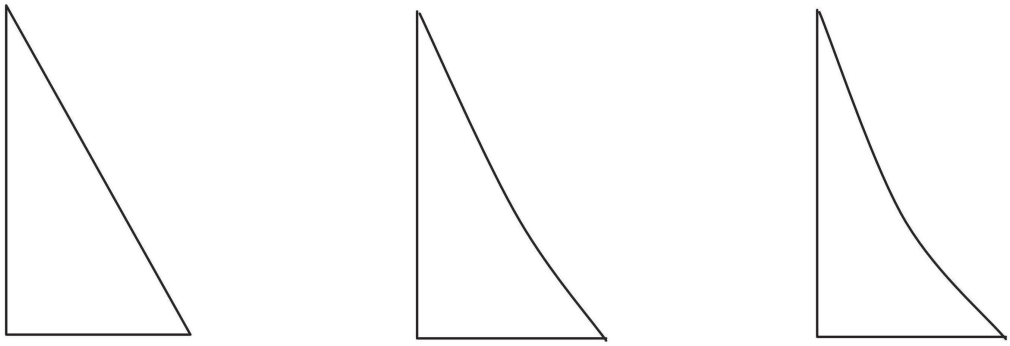


圖 2　　尖錐面

然後在四分之一個單位圓內應用尖錐術計算以 x^{2n} 的係數 $\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ 爲底的諸 $2n$ 乘尖錐的合積 (圖 3)， 得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}$$

從而獲得圓周率 π 的無窮級數值 。

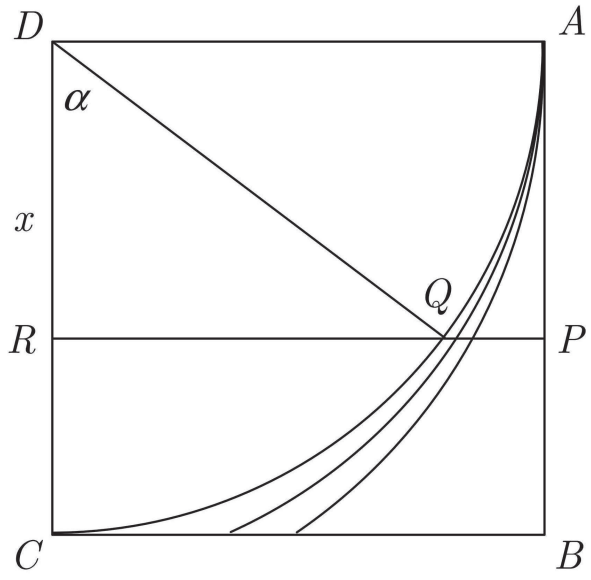


圖 3　　方內圓外尖錐的合積

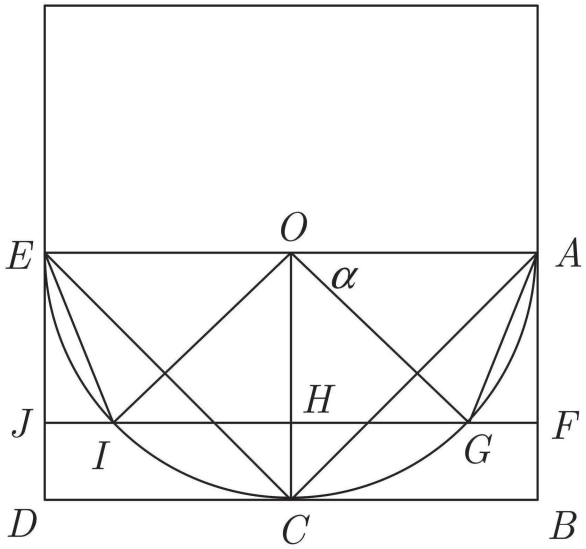


圖 4　　正弦求弧背術 (用圓內積)

在《弧矢啓秘》中， 李善蘭又用方內圓外的 “截積” 與尖錐合積的關係 (圖 4) 得到 “正弦求弧背” 即反正弦的冪級數展開式

$$\alpha = \sin\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!} \sin^{2n+1}\alpha$$

然後用直除、還原等方法得到其它諸多三角函數和反三角函數的冪級數展開式

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tan\alpha - \frac{1}{3}\tan^3\alpha + \frac{1}{5}\tan^5\alpha - \frac{1}{7}\tan^7\alpha + \cdots\ , \\
\alpha^2 &= \sec^2\alpha - \frac{6}{9}\sec^4\alpha + \frac{46}{90}\sec^6\alpha - \frac{44}{105}\sec^8\alpha + \cdots\ , \\
\alpha^2 &= 2\mathrm{vers}\,\alpha + \frac{1}{12}(2\mathrm{vers}\,\alpha)^2 + \frac{1}{90}(2\mathrm{vers}\,\alpha)^3 + \cdots\ , \\
\sin\alpha &= \alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 - \frac{1}{7!}\alpha^7 + \cdots\ , \\
\tan\alpha &= \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{15}\alpha^5 + \frac{17}{315}\alpha^7 + \cdots\ , \\
\sec\alpha &= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{5}{24}\alpha^4 + \frac{61}{721}\alpha^6 + \cdots\ , \\
\mathrm{vers}\,\alpha &= \frac{1}{2!}\alpha^2 - \frac{1}{4!}\alpha^4 + \frac{1}{6!}\alpha^6 - \frac{1}{8!}\alpha^8 + \cdots\ ,
\end{aligned}$$

其中正切、正割、反正切、反正割的冪級數展開式是在中國首次獨立地得到的。

在《對數探源》中，李善蘭列出了十條命題，從各個方面描述對數合尖錐曲線的性質。例如命題九：“凡兩殘積，此殘積之高與彼殘積之高，彼截線與此截線可相比爲比例。” (圖 5) 即是說，$x_1y_1 = x_2y_2$ 或 $xy = c$ (這裡 $c = bh$ 爲常量)。然後，根據這些性質得出了對數的冪級數展開式

$$\log n = \log(n-1) + \mu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot n^k}\ ,$$

式中的 μ 即李善蘭所謂 “諸尖錐定積之根” $\log e$，亦即 $(\ln 10)^{-1}$。

從以上可以看出，李善蘭所創立的尖錐面，是一種處理代數問題的幾何模型。它由互相垂直的底線、高線和凹向的尖錐曲線所圍成。並且在考慮尖錐合積的問題時，也是使諸尖錐有共同

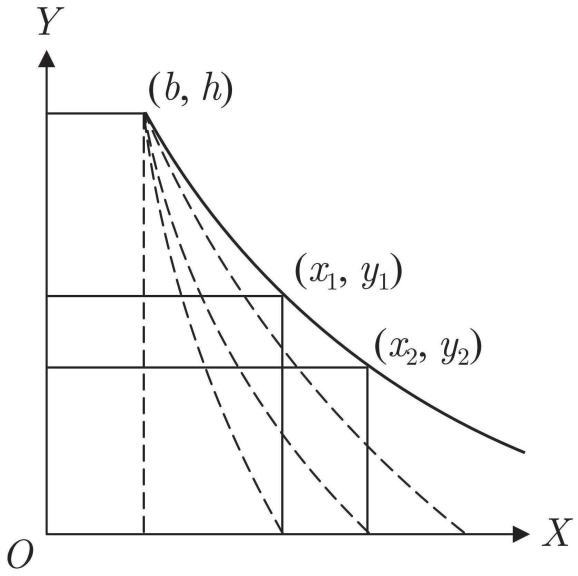


圖 5　　對數合尖錐曲線

方向的底線和高線。這樣的底線和高線具有平面直角坐標系中的橫、縱兩個坐標的作用。

而且，這種尖錐面是由乘方數漸增漸疊而得。因此，尖錐曲線是由隨同乘方數一起漸增漸疊的底線和高線所確定的點變動而成的軌跡。由於李善蘭把每一條尖錐曲線看作是無窮冪級數中相應的項，這實際上就給出了這些尖錐曲線的代數表示式 (以高線爲 x 軸，底線爲 y 軸)

$$\text{平尖錐 } y = \frac{b}{h}x \text{ (直線)，}$$

$$\text{立尖錐 } y = \frac{b}{h^2}x^2 \text{ (拋物線)，}$$

$$\text{三乘尖錐 } y = \frac{b}{h^3}x^3 \text{ (立方拋物線)，}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

同樣，

$$\text{對數合尖錐 } y(h-x) = bh \text{ (等軸雙曲線)。}$$

若以底線爲 x 軸，高線爲 y 軸，則對數合尖錐曲線的方程爲 $xy = bh$ (圖 5)。

再則，李善蘭的尖錐求積術，實質上就是冪函數的定積分公式

$$\int_0^h ax^n dx = \frac{ah^{n+1}}{n+1}$$

和逐項積分法則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^h a_n x^n dx\right) = \int_0^h \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) dx \text{ 。}$$

特別值得一提的是，李善蘭建立在尖錐術基礎上的對數論獨具特色，受到中外學者的一致讚譽。偉烈亞力說：“李善蘭的對數論，使用了具有獨創性的一連串方法，達到了如同聖文森特的 J. 格雷戈里 (Gregory，1638－1875) 發明雙曲線求積法時同樣漂亮的結果”，“倘若李善蘭生於 J. 納皮爾 (Napier，1550－1617)、H. 布里格斯 (Briggs，1556－1631) 之時，則只此一端即可名聞於世” (A. Wylie，*Chinese researches*，1897)。顧觀光發覺李善蘭求對數的方法比傳教士帶進來的方法高明、簡捷，認爲這是洋人“故爲委曲繁重之算法以惑人視聽”，因而大力表彰“中土李 (善蘭)、戴 (煦) 諸公又能入其室而發其藏，大聲疾呼“以告中土之受欺而不悟者” (顧觀光《算賸餘稿》)。

在李善蘭尖錐術的基礎上，解析幾何思想和微積分方法的萌芽，是可以生根、長葉、開花、結果的。從這個意義上說，中國數學也可能以自己特殊的方式走上近代數學的道路。但是，幾年之後，即 1852 年，李善蘭便接觸到了大量從西方傳進來的近代數學，並參與了把解析幾何和微積分學介紹進中國的翻譯工作。從此，中國傳統數學逐漸匯入世界數學發展的洪流中。

李善蘭的另一傑出數學成就是垛積術，見於《則古昔齋算學》中的《垛積比類》。

在中國數學史上，北宋沈括 (1031－1095) 首創隙積術開垛積研究之先河。元朱世傑《算學啓蒙》(1299)、《四元玉鑑》(1303)

中的垛積問題，分“落一”、“嵐峰”兩大類，其垛積公式分別爲

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1}$$

和

$$\sum_{r=1}^{n}r\binom{r+p-1}{p}=\frac{(p+1)n}{p+2}\binom{n+p}{p+1}\ ,$$

其中

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{(m-n)!n!}\ 。$$

清陳世仁 (1676 − 1722)、汪萊 (1768 − 1813)、董祐誠 (1791 − 1823) 等人繼續研究，有所成就。李善蘭集前人之大成，發揚創新，撰《垛積比類》，“所述有表、有圖、有法，分條別派，詳細言之”，自成體系，別立一幟。除三角垛和三角變垛包含了朱世傑落一形和嵐峰形兩類垛積外，又創造了三角自乘垛和乘方垛兩類新的垛積，其求和公式分別爲

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}^2=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}^2\binom{n+2p-q}{2p+1}$$

和

$$\sum_{r=1}^{n}r^m=\sum_{k=0}^{m-1}L_k^{m-1}\binom{n+k}{m+1}\ ,$$

其中“李氏數”可作如下歸納定義：

$$L_k^m=(k+1)L_k^{m-1}+(m-k+1)L_{k-1}^{m-1}\ ,$$

並有性質

$$\sum_{k=0}^{m}L_k^m=(m+1)!\ 。$$

三角自乘垛的中心，是被稱做“李善蘭恆等式”的組合公式

$$\binom{n+p}{p}^2=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}^2\binom{n+2p-q}{2p}\ 。$$

該式馳名中外，自二十世紀三十年代以來不斷引起數學界的廣泛興趣。我國數學家章用 (1911－1939)、華羅庚 (1910－1985) 和匈牙利數學家圖蘭•帕爾 (Turan Bal) 等人都研究和證明過它。

乘方垛積計算問題相當於求正整數的冪和公式，這在數學史上是一個古老的題目，同時又是通向微積分學最基本和最普遍的公式－冪函數的定積分公式的階梯。李善蘭把 $m-1$ 乘方垛積分解成 m 類共 $m!$ 個三角 m 變垛或者說是 m 類 $m!$ 個組合數之和，從而得出了正整數的 m 次冪和公式。更進一步，李善蘭以 $m-1$ 乘方垛積疊成底爲 b、高爲 h 的 m 乘尖錐，先有

$$V_{垛} = \sum_{r=1}^{n} b\left(\frac{r}{n}\right)^m \frac{h}{n} = \frac{bh}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} \binom{n+k}{m+1}$$

$$= \frac{bh}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} \prod_{i=1}^{m} \left(1+\frac{i-k}{n}\right)$$

然後取極限，即得 m 乘尖錐積爲

$$V_{錐} = \lim_{n\to\infty} V_{垛} = \frac{bh}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{m-1} = \frac{bh}{m+1}。$$

這就是著名的尖錐求積術公式，它的確淵源於中國傳統數學中的垛積術和極限方法。

李善蘭的第三項重要數學成就是他在 1872 年發表的《考數根法》，這是我國質數論上最早的一篇論文。所謂數根，就是質數。考數根法，就是判別一個正整數是否爲質數的方法。李善蘭說，“任取一數，欲辨是數根否，古無法焉”，他“精思既久，得考之法四”，即“屢乘求一”法、“天元求一”法、“小數回環”法和“准根分級”法，用以對已給的數 N，找出最小的指數 d，使 a^d-1 能被 N 整除，這裡 a 是與 N 互質的任何正整數。李善蘭證明了著名的費馬質數定理 (P. Fermat，1640)，並且指出它

的逆定理不眞。亦即，若 a^d-1 能被 N 整除，而 N 是質數，則 $N-1$ 能被 d 整除；但 d 能除盡 $N-1$，未必 N 一定是質數。李善蘭還進一步指出，若 N 非質數而 d 也能整除 $N-1$，則 N 的因數必具 $kp+1$ 的形式，且 p 爲能除盡 d 的數，k 爲正整數。只有任何具有 $kp+1$ 形式的數都不能除盡 N 時，N 才肯定是質數。

除了上述尖錐術、垛積術和質數論以外，李善蘭在其所著《麟德術解》、《測圓海鏡解》、《四元解》和《橢圓正術解》中分別解釋唐李淳風 (公元 602 − 670 年)“麟德曆” 中的二次差內插法，金李冶 (1192 − 1279)《測圓海鏡》中的 “天元術”，元朱世傑《四元玉鑑》中的高次方程組消元解法和清徐有壬《橢圓正術》中行星橢圓軌道運動問題的比例算法和對數算法。對於後者，李善蘭還在《橢圓新術》中首次在我國用無窮級數法求解刻卜勒方程。他的《火器眞訣》則提出別具一格的圖解法，以量代算，是我國第一部精密科學意義上的彈道著作。《級數回求》是通過幾個特殊的冪級數 $y=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$，以有限步驟經歸納方法反求冪級數 $x=\sum_{i=1}^{\infty} F_i(y)$。《天算或問》以自問自答的形式解決了若干有關中國古代數理天文學中的問題，其中對外國傳入的顏家樂利用恆星出地平到上中天的時間和上中天的地平高度求當地的地理緯度，李善蘭改進了這一方面的適應性，使能選用任意恆星決定任一地方的緯度，這在中國測緯史上也佔有一席之位。

李善蘭是中國近代科學的先軀者和傳播者。他在十九世紀五十年代，與偉烈亞力、艾約瑟、韋廉臣合作，翻譯出版了以下關於數學、天文學、力學和植物學的西方科學著作：

《原本》(*Elements*，古希臘歐幾里得 (Euclid) 原著，約公元前 300 年；英國 I. 巴羅 (Barrow) 英譯本，1660) 後九卷，與偉烈亞力合譯，韓應階刊本，1857；金陵書局，1865。

《代數學》(*Elements of algebra*，英國 A. 德摩根 (De Mor-

gan) 原著，1835) 共有十三卷，與偉烈亞力合譯，上海墨海書館，1859。

《代數積拾級》(*Elements of analytical geometey and of differential and integral calculus*，即是《解析幾何與微積分初步》，美國 E. 盧米斯 (Loomis) 原著，1850) 十八卷，與偉烈亞力合譯，上海墨海書館，1859。

《談天》(*Outlines of astronomy*，即是《天文學綱要》，英國 J. 赫歇爾 (Herschel) 原著，1851；第五版，1858) 十八卷，與偉烈亞力合譯，上海墨海書館，1859。

《重學》(*An elementary treaties on mechanics*，即是《初等力學》，英國 W. 胡威立 (Whewell) 原著) 二十卷附《圓錐曲線說》三卷，與艾約瑟合譯，錢氏活字版 (僅十七卷)，1859；金陵書局，1866。

《植物學》(*Elements of botany*，即是《植物學基礎》，英國 J. 林德利 (Lindley) 原著) 八卷，與韋廉臣合譯，上海墨海書館，1858。

李善蘭和偉烈亞力在徐光啓和利瑪竇於 1607 年翻譯出版古希臘數學名著《原本》前六卷之後整整 250 年，“續徐、利二公未完之業” (李善蘭《原本》序)，於 1857 年翻譯出版了《原本》後九卷，並在曾國藩的資助下，於 1865 年刊行了十五卷足本《原本》，對清末數學界產生了積極的影響。在翻譯過程中，李善蘭對其底本 “刪蕪正訛，反覆詳審”，“以意匡補”，多有發揮。如在卷十第 117 題中加按語討論無理數的存在問題，這是中國傳統數學中從未有過的。《代數學》和《代微積拾級》則是符號代數學、解析幾何學和微積分學第一次被介紹進中國，對高等數學在中國的傳播作出了開創性的貢獻。

李善蘭同偉烈亞力合譯的《談天》，內容包括哥白尼日心地動學說、刻卜勒行星橢圓運動定律和牛頓萬有引力定律等，它

使中國天文學界耳目爲之一新，近代天文知識開始在中國廣爲傳播，中國近代天文事業從此得到發展。從這種意義上講，李善蘭和《談天》在中國天文學發展史上的轉折點地位堪與哥白尼和他的《天體運動論》相比。

李善蘭同艾約瑟合譯的《重學》，是中國近代科學史上第一部包括運動學和動力學、剛體力學和流體力學在內的力學譯著，也是當時最重要、影響最大的物理學譯著。其中關於牛頓運動三定律，用動量的概念討論物體的碰撞，功能原理等，都是首次在中國得以介紹。

李善蘭同韋廉臣合譯的《植物學》，是我國最早介紹西方近代植物學的譯著，內容包括只有在顯微鏡下才能看到的植物內部組織構造，在實驗和觀察的基礎上所建立的有關植物體各器官組織的生理功能的理論，以植物體本身形態構造特點爲依據的科學的植物分類方法等。

這裡應該特別提及的是，在翻譯過程中，大量的近代科學名詞，其中文譯名都沒有先例可供參考。本著對後人負責的精神，李善蘭仔細琢磨，反覆斟酌，十分貼切地創譯了大批科學名詞，如代數學中的代數、函數、常數、變數、係數、已知數、未知數、方程、單項式、多項式等，解析幾何學中的原點、軸、圓錐曲線、拋物線、雙曲線、漸近線、切線、法線、擺線、蚌線、螺線等，微積分學中的無窮、極限、曲率、歧點、微分、積分等；天文學中的曆元、方位、視差、章動、自行、攝動、光行差、月行差、月角差、二均差、蒙氣差、星等、變星、雙星、三合星、本輪、均輪等；力學中的分力、合力、質點、剛體等；植物學中的植物、細胞、菊科、豆科、薔薇科、楊柳科、芭蕉科等。一百多年過去了，這些科學名詞不僅在我國流傳下來，還飄洋過海，東渡日本等國，沿用至今而勿替。

李善蘭在十九世紀五十年代中對西方近代科學中數學、物理、天文、生物等學科的翻譯工作，加上七十年代初徐壽對化學、華蘅芳對地學的翻譯工作，二十年間，近代科學各大門類的先進知識都介紹進了中國，這爲中國近代科學的發展奠定了堅實的理論基礎，具有不可磨滅的歷史意義。

李善蘭的科學著譯，洋洋大觀，如前所述。特別是他的數學著述，“仰承漢唐，薈萃中外，取精用宏，兼綜條貫”，“業疇人者，莫不家庋一編，奉爲圭臬” (汪熙《聽雪軒詩存 • 序》)。而他的詩文，也頗具特色，有些還集中表現了他的愛國思想和科學精神。

李善蘭自云“十三學吟詩”，十五歲時已有“膝下依依十五秋，光陰瞬息去難留，嗟余馬齒徒加長，爆竹驚心歲已周”和“數聲爆竹歲朝天，漸愧平與會講年，一歲功程今日始，急須早著祖生鞭”的佳句。他年輕時寫的《夏日田園雜興》和《田家》等詩，如“提筐去採陌頭桑，閉戶看蠶日夜忙，得到絲成空費力，一身仍是布衣裳”，頗爲體貼勞動人民的辛苦。

1842 年 5 月，英軍攻陷江浙海防重鎮乍浦。乍浦離李善蘭的家鄉硤石只有幾十里的路程。他耳聞目睹侵略者燒殺淫掠的血腥罪行，滿懷悲憤，奮筆疾書《乍浦行》一詩：“壬寅四月夷船來，海塘不守城門開。官兵畏死作鼠竄，百姓號哭聲如雷。夷人好殺攻用火，飛炮轟擊千家灰。”“飽掠十日揚帆去，滿城屍骨如山堆。朝庭養兵本衛民，臨敵不戰爲何哉?”表達了他對侵略者的刻骨仇恨，對老百姓的深切同情，也表達了他對清政府臨敵不戰的強烈不滿和他對敵主戰的鮮明態度。

李善蘭遺詩二百餘首，多數彙集於《聽雪軒詩存》(汲脩齋校本) 中。而他的文章，見於汲脩齋叢書所輯《則古昔齋文抄》和散見於《中西聞見錄》等中的，計有序跋、書信、傳記、雜文等數十篇。

在《談天》序中，李善蘭大力表彰哥白尼、刻卜勒、牛頓等人不斷探索眞理、“苟求其故”的科學態度，勇於批判乾嘉學派泰斗阮元 (1764－1849) 對哥白尼學說的攻擊和錢大昕 (1727－1804) 對刻卜勒定律的實用主義觀點，說阮、錢“未嘗精心考察，而拘牽經義，妄生議論，甚無謂也”。在《星命論》中，李善蘭揭露“術士專以五行之生克判人一生之休咎”的荒誕無稽，其論透闢，發人深省。

李善蘭生性落拓，跌宕不羈，潛心科學，淡於利祿。曾國藩等賞識他，“屢欲列之荐牘，皆力辭”。晚年他雖官居內閣高位，但從來沒有離開過同文館教學崗位，也沒有中斷過科學研究工作。他自署對聯“小學略通書數，大隱不在山林”張貼門上，表明他仍然以在野之隱士自居，而不與貪官污吏者同流合污。

讀書、著書、譯書、教書，這就是李善蘭一生的活動。作爲中國近代科學的先驅者和傳播者，人們將永遠紀念他。

文　　獻

原始文獻

[1] (清) 李善蘭，則古昔齋算學，獨山莫氏刊本，1867。

[2] (清) 李善蘭，考數根法，中西聞見錄，第二、三、四號，18

[3] (清) 李善蘭等譯，原本，韓應陛刊本，1857。

[4] (清) 李善蘭等譯，代數學，上海墨海書館，1859。

[5] (清) 李善蘭等譯，代微積拾級，上海墨海書館，1859。

[6] (清) 李善蘭等譯，談天，上海墨海書館，1859。

[7] (清) 李善蘭等譯，重學，錢氏刊本，1859。

[8] (清) 李善蘭等譯，植物學，上海墨海書館，1858。

[9] (清) 李善蘭，則古昔齋文抄，《汲脩齋叢書》(抄本)，北京圖書館藏。

[10] (清) 李善蘭，聽雪軒詩存，汲脩齋校本 (抄本)，北京圖書館藏。

[11] 苞溪李氏家乘， 祠堂藏板， 1890。

研究文獻

[12] 周明群， 李鄒顧戴徐諸家對於對數之研究， 清華學報， 3 (1926)， 2， 第 1247－1268 頁。

[13] 李儼， 李善蘭年譜， 見李儼《中算史論叢》第四集， 科學出版社， 1955。

[14] 章用， 垛積比類疏證， 科學， 23 (1939)， 11， 第 647－663 頁。

[15] 嚴敦傑， 中算家的質數論， 數學通報， 4 (1954)， 第 6－10 頁； 5 (1954)， 第 12－15 頁。

[16] F.J. Swetz, *The introduction of mathematics in higher education in China*, 1865－1887, Historia Mathematica, 1 (1974), 2, 167－179。

[17] 李迪， 十九世紀中國數學家李善蘭， 中國科技史料， 3 (1982)， 3， 第 15－21 頁。

[18] 羅見今， 《垛積比類》內容分析， 內蒙古師範學院學報 (自然科學版)， 1982， 1， 第 89－105 頁。

[19] 王渝生， 李善蘭的尖錐術， 自然科學史研究， 2 (1983)， 3， 第 266－288 頁。

[20] 王渝生， 李善蘭－中國近代科學的先驅者， 自然辯證法通訊， 5 (1983)， 5， 第 59－72 頁。