注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

第十三章　常用對數

13.1　對數

我們已經學過了指數，現在來學習與指數有緊密聯繫的對數。

我們知道，2 的 4 次冪等於 16，可以記作

$$2^4 = 16 \text{ ，}$$

這裡 16 是 2 的 4 次冪，2 是底數，4 是指數。

在計算中，我們還會遇到相反的問題：2 的多少次冪等於 16？為了表示 16 是 2 的多少次冪，我們採用一個新的式子：

$$\log_2 16 = 4 \text{ ，}$$

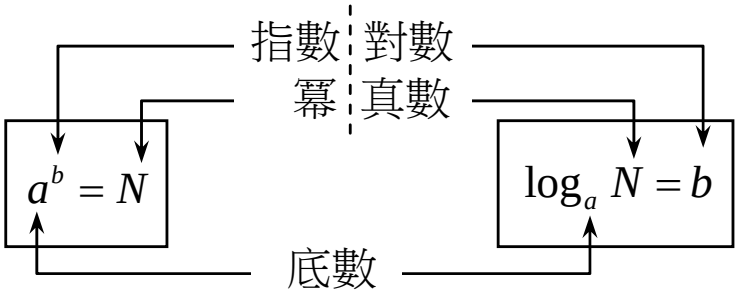
這裡 4 叫做以 2 為底的 16 之對數，2 仍叫做底數，16 叫做真數。

一般地說，如果 a $(a>0 \text{ 、 } a\neq 1)$的 b 次冪等於 N，就是 $a^b = N$ ，數 b 就叫做以 a 為底的 N 之**對數**，記作 $\log_a N = b$ [1]，其中 a 叫做**底數**(簡稱**底**)，N 叫做**真數**。

在實數範圍內，正數的任何次冪都是正數。在 $a^b = N$ 中，因為 a 是不等於 1 的正數，所以對於任意一個實數 b，N 總是正數，也就是說零與負數沒有對數。

本章對數式中的字母，如不加特殊說明，底數都是不等於 1 的正數，真數都是正數。

指數式 $a^b = N$ 中的底數、指數、冪與對數式 $\log_a N = b$ 中的底數、對數、真數的關係可表示如下：



[1] 「log」是拉丁文 logarithm (對數) 的縮寫。

如果把 $a^b = N$ 中的 b 寫成 $\log_a N$ ，有

$$a^{\log_a N} = N \text{ 。}$$

例如在 $2^4 = 16$ 中，如果把 4 寫成 $\log_2 16$ ，就有

$$2^{\log_2 16} = 16 \text{ 。}$$

【例 1】把下列指數式寫成對數式：

(1) $5^4 = 625$ ；　　(2) $3^{-2} = \frac{1}{9}$ 。

解　(1) $\log_5 625 = 4$ ；　　(2) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ 。

【例 2】把下列對數式寫成指數式：

(1) $\log_2 8 = 3$ ；　　(2) $\log_{10} 10000 = 4$ 。

解　(1) $2^3 = 8$ ；　　(2) $10^4 = 10000$ 。

【例 3】已知 $\log_{10} N = -2$ ，求 N。

解　由 $\log_{10} N = -2$ ，得 $10^{-2} = N$ 。所以

$$N = \frac{1}{100} \text{ 。}$$

【例 4】求下列各式的值：

(1) $\log_9 81$ ；　　(2) $\log_3 \frac{1}{27}$ 。

解　(1) 設 $\log_9 81 = x$ ，則 $9^x = 81$ 。

$\because \quad 9^2 = 81$

$\therefore \quad x = 2$

即

$$\log_9 81 = 2 \text{ 。}$$

(2) 設 $\log_3 \frac{1}{27} = x$ ，則 $3^x = \frac{1}{27}$ 。

$\because \quad 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$

$\therefore \quad x = -3$

即

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3 \text{ 。}$$

【例 5】求下列各式的值：

(1) $\log_4 4$ ；　　(2) $\log_7 1$ 。

解　(1) 設 $\log_4 4 = x$ ，則 $4^x = 4$ 。

$\because \quad 4^1 = 4$

$\therefore \quad x = 1$

即

$$\log_4 4 = 1 \text{ 。}$$

(2) 設 $\log_7 1 = x$ ，則 $7^x = 1$ 。

$\because \quad 7^0 = 1$

$\therefore \quad x = 0$

即

$$\log_7 1 = 0 \text{ 。}$$

例 5 可以推廣到一般情況，設 a 是不等於 1 的正數，則

$$\boldsymbol{\log_a a = 1}$$

$$\boldsymbol{\log_a 1 = 0}$$

根據對數的定義，同學們可以自己證明這兩個等式。

練　習

1. 把下列指數式寫成對數式：

(1) $2^5 = 32$ ；　(2) $10^3 = 1000$ ；　(3) $7^{-2} = \dfrac{1}{49}$ ；

(4) $10^0 = 1$ ；　(5) $8^{\frac{2}{3}} = 4$ ；　(6) $27^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$ ；

練 習

2. 把下列對數式寫成指數式：

(1) $\log_3 9 = 2$ ；　(2) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ ；

(3) $\log_{10} 0.001 = -3$ ；　(4) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ ；

(5) $\log_5 5 = 1$ ；　(6) $\log_{27} \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$ 。

3. 求下列各式的值：

(1) $\log_5 25$ ；　(2) $\log_2 \frac{1}{16}$ ；

(3) $\log_{10} 0.01$ ；　(4) $\log_a a^5$ 。

4. 求下列各式中的 x：

(1) $\log_2 x = 5$ ；　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$ ；

(3) $\log_5 x = 1$ ；　(4) $\log_3 x = 0$ 。

5. 求下列各式的值：

(1) $\log_{15} 15$ ；　(2) $\log_{0.4} 1$ ；

(3) $\log_9 1$ ；　(4) $\log_{3.7} 3.7$ 。

6. 求下列各式的值：

(1) $5^{\log_5 10}$ ；　(2) $0.2^{\log_{0.2} 5}$ 。

13.2 積、商、冪、方根的對數

我們學過了指數的定義及運算，知道如果 $a > 0$ ，那麼

$$a^p \bullet a^q = a^{p+q}$$

$$a^p \div a^q = a^{p-q}$$

$$(a^p)^n = a^{np}$$

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

根據這些等式與對數的定義，我們可以得到對數的運算性質。

1. 設 $\log_a M = p$ 、 $\log_a N = q$ 。

由對數的意義，得

$$M = a^p \text{ 、 } N = a^q \text{ 。}$$

$\therefore \quad M \bullet N = a^p \bullet a^q = a^{p+q}$

$\therefore \quad \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$

這就是說，**兩個正數的積之對數，等於同一底數的這兩個數的對數之和**，即

$$\boldsymbol{\log_a MN = \log_a M + \log_a N} \text{ 。}$$

當因數多於兩個時，上述性質仍然成立。例如

$$\log_a LMN = \log_a L + \log_a M + \log_a N \text{ 。}$$

2. 設 $\log_a M = p$ 、 $\log_a N = q$ ，則

$$M = a^p \text{ 、 } N = a^q \text{ 。}$$

$\therefore \quad \dfrac{M}{N} = \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$\therefore \quad \log_a \dfrac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$

這就是說，**兩個正數的商之對數，等於同一底數的被除數的對數減去除數的對數之差**，即

$$\boldsymbol{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N} \text{ 。}$$

3. 設 $\log_a M = p$ ，則

$$M = a^p \text{ 。}$$

$\therefore \quad M^n = (a^p)^n = a^{np}$

$\therefore \quad \log_a M^n = np = n\log_a M$

這就是說，**一個正數的冪之對數，等於冪的底數之對數乘以冪指數**，即

$$\boldsymbol{\log_a M^n = n\log_a M} \text{ 。}$$

4. **一個正數的算術根之對數，等於被開方數的對數除以根指數**，即

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M \text{ 。}$$

同學們可以自己證明這個性質。

【例 1】用 $\log_a x$ 、$\log_a y$ 、$\log_a z$ 表示下列各式：

(1) $\log_a \frac{xy}{z}$ ；　　(2) $\log_a x^3y^5$ ；

(3) $\log_a \frac{\sqrt{x}}{yz}$ ；　　(4) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$ 。

解

(1) $\log_a \frac{xy}{z} = \log_a xy - \log_a z$

$= \log_a x + \log_a y - \log_a z$

(2) $\log_a x^3y^5 = \log_a x^3 + \log_a y^5$

$= 3\log_a x + 5\log_a y$

(3) $\log_a \frac{\sqrt{x}}{yz} = \log_a \sqrt{x} - \log_a yz$

$= \frac{1}{2}\log_a x - (\log_a y + \log_a z)$

$= \frac{1}{2}\log_a x - \log_a y - \log_a z$

(4) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \log_a x^2\sqrt{y} - \log_a \sqrt[3]{z}$

$= \log_a x^2 + \log_a \sqrt{y} - \log_a \sqrt[3]{z}$

$= 2\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \frac{1}{3}\log_a z$

【例 2】計算：　(1) $\log_{10} \sqrt[5]{100}$ ；　　(2) $\log_2(4^7 \cdot 2^5)$ 。

解　(1) $\log_{10}\sqrt[5]{100}=\frac{1}{5}\log_{10}100=\frac{2}{5}$ ；

(2) $\log_2(4^7\bullet 2^5)=\log_2 4^7+\log_2 2^5$

$=7\log_2 4+5\log_2 2$

$=7\times 2+5\times 1$

$=19$

練　習

1. 用 $\log_{10}x$ 、$\log_{10}y$ 、$\log_{10}z$ 、$\log_{10}(x+y)$ 、$\log_{10}(x-y)$ 表示下列各式：

(1) $\log_{10}xyz$ ；　(2) $\log_{10}(x+y)z$ ；

(3) $\log_{10}(x^2-y^2)$ ；　(4) $\log_{10}\frac{xy^2}{z}$ ；

(5) $\log_{10}\frac{xy}{(x+y)z}$ ；　(6) $\log_{10}\frac{x^2-xy}{100}$ 。

2. 計算：

(1) $\log_3(27\times 9^2)$ ；　(2) $\log_{10}100^2$ ；

(3) $\log_{10}0.0001^3$ ；　(4) $\log_7\sqrt[3]{49}$ 。

3. 計算：

(1) $\log_2 6-\log_2 3$ ；　(2) $\log_{10}5+\log_{10}2$ ；

(3) $\log_5 3+\log_5\frac{1}{3}$ ；　(4) $\log_3 5-\log_3 15$ 。

4. 下面的式子對不對，為什麼？

(1) $\log_2(8-2)=\log_2 8-\log_2 2$ ；

(2) $\log_{10}(4-2)=\frac{\log_{10}4}{\log_{10}2}$ ；

(3) $\frac{\log_2 4}{\log_2 8}=\log_2 4-\log_2 8$ 。

習　題　一

1. 求下列各式中的 x。並指出計算 x 時是求冪，求對數，或是求方根：

(1) $3^4 = x$ ；　(2) $x^3 = 1000$ ；　(3) $10^x = 0.0001$。

2. 用對數形式把下列各式中的 x 表示出來：

(1) $4^x = 16$ ；　(2) $3^x = 1$ ；

(3) $4^x = 2$ ；　(4) $2^x = 0.5$ 。

3. 把下列對數式寫成指數式，並求出 x 的值：

(1) $\log_2 32 = x$ ；　(2) $\log_5 625 = x$ ；

(3) $\log_{10} 1000 = x$ ；　(4) $\log_8 4 = x$ ；

(5) $\log_3 \frac{1}{9} = x$ ；　(6) $\log_3 3 = x$ ；

(7) $\log_{10} \frac{1}{1000} = x$ ；　(8) $\log_{16} \frac{1}{2} = x$ 。

4. 用 $\log_a x$ 、$\log_a y$ 、$\log_a z$ 、$\log_a (x+y)$ 、$\log_a (x-y)$ 表示下列各式：

(1) $\log_a \frac{\sqrt{x}}{y^2 z}$ ；　(2) $\log_a x\sqrt[4]{\frac{z^3}{y^2}}$ ；

(3) $\log_a xy^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{2}{3}}$ ；　(4) $\log_a \frac{xy}{x^2 - y^2}$ ；

(5) $\log_a \left(\frac{x+y}{x-y} \bullet y \right)$ ；　(6) $\log_a \left[\frac{y}{x(x-y)} \right]^3$ 。

5. 計算：

(1) $\log_a 2 + \log_a \frac{1}{2}$ ；　(2) $\log_3 18 - \log_3 2$ ；

(3) $\log_{10} \frac{1}{4} - \log_{10} 25$ ；　(4) $2\log_5 10 + \log_5 0.25$ 。

6. (1) 用 $a=\log_{10}5$ 表示 $\log_{10}2$ 、 $\log_{10}20$ ；

(2) 用 $a=\log_{10}2$ 與 $b=\log_{10}3$ 表示 $\log_{10}4$ 、 $\log_{10}5$ 、 $\log_{10}6$ 、 $\log_{10}12$ 、 $\log_{10}15$ 。

13.3 常用對數

由於我們通常用的是十進制記數法，所以我們通常用的對數是以 10 為底的對數，這種對數叫做**常用對數**。在表示常用對數的時候，通常把底數 10 略去。如不作特殊說明，一般所說的對數都是指常用對數。例如說 100 的對數是 2，就是說 100 的常用對數是 2。

我們知道：

$$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ 10^3=1000 & \log 1000=3 \\ 10^2=100 & \log 100=2 \\ 10^1=10 & \log 10=1 \\ 10^0=1 & \log 1=0 \\ 10^{-1}=0.1 & \log 0.1=-1 \\ 10^{-2}=0.01 & \log 0.01=-2 \\ 10^{-3}=0.001 & \log 0.001=-3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

可以看出，10 的整數次冪之對數是一個整數，並且真數較大的時候，它的對數也較大。

一個正數，如果不是 10 的整數次冪，它的對數是一個小數。例如 $\log 72$ 是一個 1 與 2 之間的一個小數，$\log 0.0072$ 是 -3 與 -2 之間的一個小數。

一個正數的對數(具有一定精確度的近似值)，從前可利用「對數表」求得，現在則可利用工程計算器很方便地求得。

13.4 對數的首數與尾數

我們知道，$1<3.408<10$，所以$0<\log 3.408<1$，就是說，$\log 3.408$是一個正的純小數。

如果知道了$\log 3.408=0.5325$，我們可以求 0.03408、340.8、34080 的對數。

首先用科學記數法表示上面各數，再求出對數：

$$\begin{aligned}\log 0.03408 &= \log(3.408\times 10^{-2})\\ &= \log 10^{-2}+\log 3.408\\ &= -2+0.5325\\ \log 340.8 &= \log(3.408\times 10^{2})\\ &= \log 10^{2}+\log 3.408\\ &= 2+0.5325\\ \log 34080 &= \log(3.408\times 10^{4})\\ &= \log 10^{4}+\log 3.408\\ &= 4+0.5325\end{aligned}$$

一般地，可以得到：

1. 所有正數的對數都可以寫成一個整數(正整數、零或負整數)加上一個正的純小數(或者零)之形式。

整數部分叫做這個對數的**首數**，正的純小數(或者零)部分叫做這個對數的**尾數**。例如：

在$\log 0.03408=-2+0.5325$中，首數是-2，尾數是 0.5325；

在$\log 340.8=2+0.5325$中，首數是 2，尾數是 0.5325；

在$\log 34080=4+0.5325$中，首數是 4，尾數是 0.5325。

從上例還可以得到：

2. 只有小數點位置不同的數，它們的對數之尾數都相同。

求一個正數的對數之首數時，用科學記數法把這個數寫成$a\times 10^{n}$的形式，其中$1\le a<10$、n是整數，n就是這個正數的對數之首數。

對數的首數是正整數或者零的時候，可以把首數與尾數相加，寫成小數的形式。例如 $\log 340.8 = 2.5325$、$\log 3.408 = 0.5325$。而當對數的首數是負整數的時候，通常會把「－」號寫在這一個整數的上面，並把首數與尾數之間的「＋」號略去不寫。例如，$\log 0.03408 = -2 + 0.5325$，通常寫成 $\log 0.03408 = \bar{2}.5325$。這裡要注意 $\bar{2}.5325$ 等於 $-2 + 0.5325$ (即 -1.4675)，不等於 -2.5325。

【例 1】用科學記數法表示下列各數，並求出各數的對數之首數。

32.16、7.8302、0.0002076。

解　$32.16 = 3.126 \times 10^{1}$，對數的首數是 1；

$7.8302 = 7.8302 \times 10^{0}$，對數的首數是 0；

$0.0002076 = 2.076 \times 10^{-4}$，對數的首數是 -4。

【例 2】寫出下列各對數的首數與尾數：

(1) $\log a = 0.2350$；　(2) $\log b = \bar{2}.4087$；

(3) $\log c = -2.4087$。

解　(1) 首數是 0，尾數是 0.2350；

(2) 首數是 -2，尾數是 0.4087；

(3) $\log c = -2.4087$

$= -2 - 0.4087$

$= (-2 - 1) + (1 - 0.4087)$

$= -3 + 0.5913$

$= \bar{3}.5913$

首數是 -3，尾數是 0.5913。

練　習

1. 用科學記數法表示下列各數，並求出它們的對數之首數。

2570000、354.7、40.8、5.06、

9、0.84、0.07563、0.00002129。

練 習

2. （口答）說出下列各數的對數之首數：

6720、3.1416、$\frac{1}{2}$、80、0.6428、0.00495。

3. （口答）下列各式的值是什麼？

(1) $\log 10$；　(2) $\log 10000$；　(3) $\log 1$；

(4) $\log 10^{6}$；　(5) $\log 10^{-5}$；　(6) $\log 0.01$；

(7) $\log 0.1$；　(8) $\log 0.000001$。

4. 寫出下列各對數的首數與尾數：

(1) $\log a = 3.0720$；　(2) $\log b = 0.0129$；

(3) $\log c = \bar{4}.2157$；　(4) $\log d = -4.2157$；

(5) $\log 0.000432 = \bar{4}.6355$；　(6) $\log 0.00574 = -2.2411$。

5. 計算：

(1) $\bar{1}.5483 + \bar{2}.8712$；　(2) $\bar{2}.7125 - \bar{1}.9418$；

(3) $\bar{4}.5082 \times 3$；　(4) $\bar{3}.6479 \times 5$；

(5) $\bar{2}.2418 \div 2$；　(6) $\bar{1}.1535 \div 3$。

6. 長方體的體積是 $45.8\ \text{cm}^3$，長是 $3.5\ \text{cm}$，寬是 $2.4\ \text{cm}$，求它的高。

7. 已知圓的面積等於 $0.6567\ \text{cm}^2$，求它的周長。

8. 某種產品的產量平均每年比上一年增長 12.5%，求經過 6 年產量比原來增長的百分數。

習 題 二

1. 寫出下列各對數的首數與尾數：

(1) $\log 30 = 1.4771$；　(2) $\log 8.56 = 0.9325$；

(3) $\log 0.74 = \bar{1}.8692$；　(4) $\log 0.08 = -1.0969$。

2. 已知一個數的對數之首數是下列各數，問這個數是大於 1、等於 1 還是小於 1？把它用科學記數法 $a\times10^n$ 表示時，n 是多少？
(1) 4； (2) −5； (3) 1； (4) 0； (5) −2； (6) 2。

3. 把下列負首數與正尾數的和改成一個負數之形式：
(1) $\bar{3}.2175$； (2) $\bar{1}.8998$。

4. 把下列各數改成負首數與正尾數的和之形式：
(1) −2.3817； (2) −0.2329；
(3) −4.1026； (4) −1.7830。

5. 已知 $\log x$ 的尾數與 $\log 7409$ 的尾數相同，它的首數是下列各數，求 x。
(1) 5； (2) −2； (3) 0； (4) −1；
(5) 1； (6) 3； (7) 2； (8) −3。

6. 下列的式子對不對？為什麼？
(1) $\log(a+b)=\log a+\log b$； (2) $\log(a-b)=\dfrac{\log a}{\log b}$；
(3) $(\log 2)^3=3\log 2$； (4) $\sqrt{\log 2}=\dfrac{1}{2}\log 2$。

7. 根據球的體積公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，求半徑 r 等於 13.54 cm 的球之體積。

8. 圓柱的體積公式是 $V=\pi r^2h$，其中 r 是圓柱的底面半徑，h 是圓柱的高。求直徑是 0.2 cm 的 2000 m 長之銅絲的重量(已知銅的比重是 8.9 g/cm^3)。

9. 在某種條件下繁殖一種細菌，一小時以後的數量是原來之 1.8 倍，計算在這樣的條件下 24 小時以後的數量是原來數量的多少倍。

小　结

一、本章主要內容是對數的概念、運算性質以及常用對數。

二、設 a ($a>0$ 、 $a\neq 1$)的 b 次冪等於 N，就是 $a^b=N$ ，數 b 就叫做以 a 為底的 N 之對數，記作 $\log_a N=b$ ，其中 a 是對數的底數(簡稱底)，N 叫做真數。

在對數式 $\log_a N=b$ 中， $a>0$ 、 $a\neq 1$ 、 $N>0$ 。

三、積、商、冪、方根的對數是：

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$\log_a M^n=n\log_a M$$

$$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$$

利用它們可以把乘、除運算化為加、減運算，把乘方、開方運算轉化為乘、除運算。

四、我們通常用的對數是以 10 為底的對數，這種對數叫做常用對數，N 的常用對數可以簡寫成 $\log N$ 。知道一個正數，可以由「常用對數表」(或利用工程計算器)查出這個數的對數；知道一個對數，可以由「反對數表」(或利用工程計算器)查出這個數。利用「常用對數表」、「反對數表」及積、商、冪、方根的對數之性質，可以比較簡潔地進行乘、除、乘方、開方的計算。

複習參考題十三

1. a 是什麼數時，下列各式成立？
   (1) $|a|=a$ ；　(2) $|a|=-a$ ；
   (3) $|a|=|-a|$ ；　(4) $a=-a$ 。

2. (1) 設 $(x-3)^2+(y+1)^2=0$ ，且 x、y 為實數，求 x、y ；
   (2) 設 $x^2+4y^2-2x+4y+2=0$ ，且 x、y 為實數，求 x、y 。

3. 計算：
   (1) $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)$ ；
   (2) $(a+b-c-d)(a-b-c+d)$ ；
   (3) $(x+y)(2x+y)(x^2+xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$ ；
   (4) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ；
   (5) $(a-2b)^2(a+2b)^2$ ；
   (6) $(a-2b)(a+2b)(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$ 。

4. 分解因式：
   (1) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ ；
   (2) $a^4b+a^3b^2-a^2b^3-ab^4$ ；
   (3) x^4-5x^2+4 ；
   (4) $4mn+1-m^2-4n^2$ ；
   (5) m^4+m^2+1 ；
   (6) $a^3-b^3+a(a^2-b^2)+b(a-b)^2$ ；
   (7) $2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a^2-b^2)^2$ 。

5. (1) 已知 $x+y+z=a$ 、 $xy+yz+zx=b$ ，求 $x^2+y^2+z^2$ ；
   (2) 已知 $x+\dfrac{1}{x}=5$ ，求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 。

6. 化簡：
   (1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)}$ ；

(2) $\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)\div\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$；

(3) $\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{a}}-\dfrac{1}{a+1}+1$；　(4) $\dfrac{\sqrt{20}}{8}-\sqrt{\dfrac{9}{5}}+\dfrac{5}{\sqrt{45}}$；

(5) $\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}-\dfrac{3}{2-\sqrt{7}}-\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}$；　(6) $\dfrac{\sqrt[3]{5^{-\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}}}{(\sqrt{5}-1)^2}$。

7. 解方程：

(1) $42x^2+x-30=0$；　(2) $4\left(\dfrac{3}{x}+1\right)^2-9=0$；

(3) $x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{2}x-\sqrt{6}=0$；

(4) $\dfrac{1}{2-x}-1=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12}$；(5) $3x^4-29x^2+18=0$；

(6) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}=\sqrt{3x+1}$。

8. 解方程組：

(1) $\begin{cases}cx+y=2c+1\\x-cy=2-c\end{cases}$ $(c\neq 0)$，求 x、y；

(2) $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ $(a_1b_2\neq a_2b_1)$，求 x、y；

(3) $\begin{cases}\dfrac{5x+3y}{4}+\dfrac{y+2x}{3}=3\\\dfrac{5x+3y}{4}-\dfrac{y+2x}{3}=1\end{cases}$；　(4) $\begin{cases}\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{5}{2y+3}=-4\\\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{2}{2y+3}=5\end{cases}$；

(5) $\begin{cases}5x-7y=-10\\9y+4z=1\\3x+8z=-4\end{cases}$；　(6) $\begin{cases}x^2-xy+2=0\\2x-y=1\end{cases}$；

(7) $\begin{cases} 3x^2+5x-8y=36 \\ 2x^2-3x-4y=3 \end{cases}$ 。

9. k 為什麼值時，方程 $(k-1)x^2-2x+3=0$ 有兩個不相等的實數根？有兩個相等實數根？沒有實數根？

10. 求方程 $x^2+px+q=0$ 之兩根的平方和及兩根的立方和。

11. 求下列各式中的 x：

(1) $64^x=\frac{1}{4}$ ；　　(2) $2^x=0.125$ 。

12. 求下列各式中的 x：

(1) $\log_8 x=1$ ；　　(2) $\log_2 \sqrt{2}=x$ ；

(3) $\log_x 8=\frac{3}{2}$ ；　　(4) $\log_7 x=0$ 。

13. 下面的式子對不對(其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 、 $x>0$ 、 $y>0$ 、n 是大於 1 的整數)？如果不對，舉出例子。

(1) $(\log_a x)^2=2\log_a x$ ；　　(2) $-\log_a x=\log_a \frac{1}{x}$ ；

(3) $\frac{\log_a x}{\log_a y}=\log_a \frac{x}{y}$ ；　　(4) $\frac{\log_a x}{n}=\log_a \sqrt[n]{x}$ 。

14. (1) $\log 100N$ 比 $\log \frac{N}{100}$ 大多少？

(2) $\log 0.001N$ 比 $\log 1000N$ 小多少？

15. 已知 $\log 2=0.3010$ 、 $\log 3=0.4771$ ，求 $\log 0.0015$ 、 $\log 750$ 。

16. 已知 $a=35.72$ 、 $b=28.17$ 、 $c=30.45$ 、 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ，求 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

17. (1) 確定 2^{100} 是幾位數，並且求出它的最高之兩位數碼；
    (2) 確定 0.7^{100} 在小數點後面連續有多少個零，並且求出它的第一個不等於零之數碼。

18. 要使我國外貿的總金額經過 20 年成為 4 倍，平均每年的增長率是百分之幾？

19. 一些機器設備，原來價值 7200 萬元，由於使用磨損，每年比上一年價值降低 5.5%，求 5 年後這些機器設備的價值。