注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:
Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.
Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

Southeast Mathematical Olympiad
2010 東南數學競賽

參賽代表遴選初賽

編 號: _____ 校 名: _____ 姓 名: _____

※每題 7 分，必須詳細寫下證明及理由，考試時間四小時。

1. 試證：任意的有理數可以表示為 $\frac{a^3+b^3}{a^3+c^3}$，其中 a、b、c 為整數。

證：選取 d=a-b。則有 $(a^3+b^3)/(a^3+d^3)= (a+b)/(2a-b)$。

選取 a=m+n、b=2m-n。得 d=a-b=(m+n)-(2m-n)=2n-m。

如此 a+b=3m、2a-b=3n，使得 m/n=(a+b)/(2a-b)。，

若 m、n 為正整數時，要求 a、b、d 為正當且僅當 2m>n、2n>m；即 1/2<m/n<2。

綜合以上的結果，得知：對於任意的正有理數 x，且 1/2<x<2，則 x 可以表示為$(a^3+b^3)/(c^3+d^3)$，其中 a、b、d 為正整數。

對於任意的正有理數 x，可以選擇正整數 p、q 使得 $1/2<p^3x/q^3<2$。因此得知：$p^3x/q^3=(a^3+b^3)/(a^3+d^3)$。所以 $x=(A^3+B^3)/(A^3+D^3)$，其中 A=qa、B=qb、D=pd。

2. 設 a、b、c 為互不相同的正整數，使得 $2a+2b$、$2b+2c$ 和 $2c+2a$ 均為平方數，試求 $a+b+c$ 的最小可能值。

證：令 $2a+2b=s^2$，$2b+2c=t^2$， **和** $2c+2a=u^2$. 由於 a、b、c **為互不相同的正整數，**WLOG, 令 u> s > t. 則 $s^2+t^2>u^2$

若 (s, t, u) = (8,10,12) ， 則 $a=27$、$b=5$、$c=45$.

$4(a+b+c)=s+t+u^2$ **= 64+100+144=304.**

$a+b+c$ **= 77 滿足題意**。

由於 $4(a+b+c)=s+t+u^2$ 所以**求** $a+b+c$ **的最小可能值也就是說求** $s+t+u^2$ **的最小可能值**。因為 (s, t, u)都是偶數且任何二個數之和一定大於第三個數。

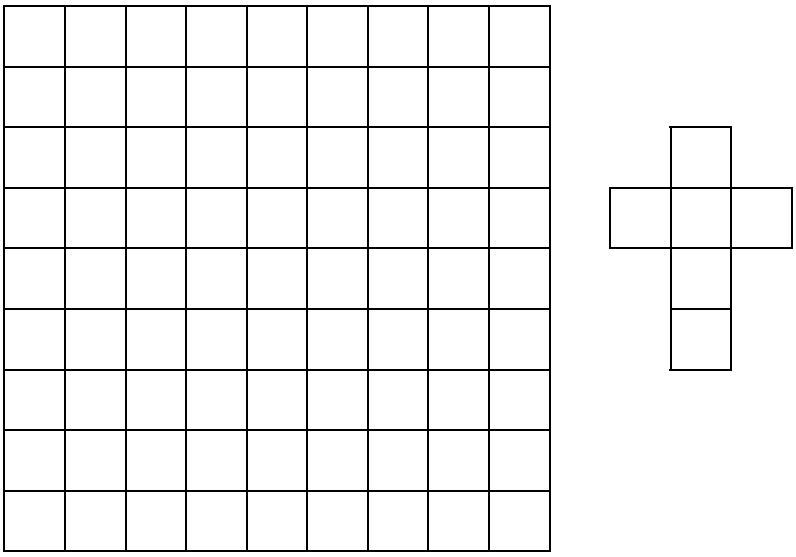
所以$(t-2)^2+t^2 \geq s^2+t^2>u^{22}$ 。因此 u ≥ 12 且 t ≥ 10。

由於(s, t, u) ≠ (2,10,12), (4,10,12), (6,10,12) .

如果 u ≥ 14， $s+t+u^2$ **的最小可能值** $\geq u^2+(u^2+2) \geq 196+198 >304$。

所以 $s+t+{}^{2}u^{2}$ **的最小可能值 為 304,** 因此 $a+b+c$ **的最小可能值為 77**

3. 下圖是一個 9×9 的方格表，及一個由六個 1×1 的小方格所組成的“X 形六方塊”。



現要將若干個 X 形六方塊放在方格表內(必要時可以將六方塊旋轉)，使得：

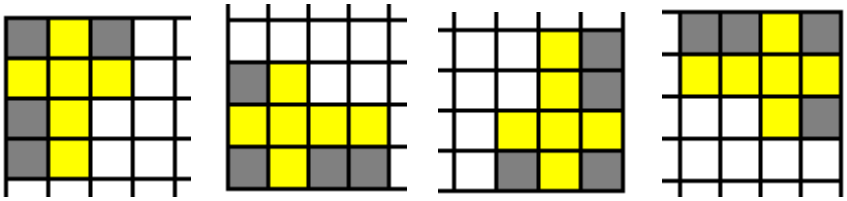
a. X 形六方塊的每個小方格只能沿著方格表的格線放置；

b. 任意的兩個六方塊互不重疊。

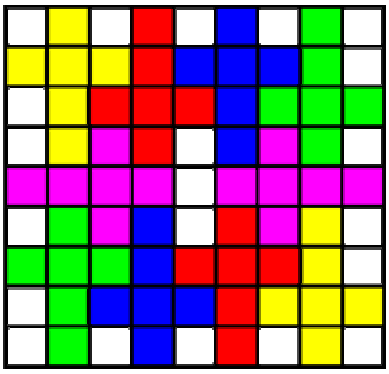
請確定放置在方格表上的 X 形六方塊數目之極大值，並證明之。

證：答案是十個十字架。

無論如何放置十字架，較近正方形的四個頂點中任意一個，必定有四個附近的小方格不能被任何一個十字架所覆蓋(見下圖)。



所以十字架至多只能覆蓋 9x9-4x4=65 個小方格。由抽屜原理，得知至多只能被[65/6]=10 個十字格所覆蓋。剩下要在 9x9 的正方形放入 10 個十字格，見下圖：



4. 設 ABC 是一銳角三角形，由點 A 到 BC 的垂足為 D。若角 B 和角 C 的角平分線分別交 AD 於 E 和 F。已知 $BE=CF$，請證明三角形 ABC 是等腰三角形。

證：用反證法，假設 AB<AC，因此 BD<CD。若 B'是 B 與直線 AD 的對稱點，則 B'在線段 CD 之間。
現要證明 E 不可能在 DF 之間；否則 BE=B'E<CE≦CF 而這是個矛盾。所以 E 只能在線段 AF 之間。因此線段 EB'和線段 FC 相交於一點 F。而因為 XC 是角 BCA 的角平分線，X 到 AC 和 DC 之距離相同。B'X 亦同時為角 AB'D 之角平分線，因此 X 到 AB'和 DC 的距離相同。但以上的兩個結論不可能同時成立，因為由 X 到 AC 的垂足必先交 AB'而再交 AC。這是個矛盾，因此原題目的結論成立，即三角形 ABC 是等腰。