注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:
Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.
Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

Southeast Mathematical Olympiad
2010 東南數學競賽

參賽代表遴選決賽

編 號: _____ 校 名: _____ 姓 名: _____

※每題 7 分，必須詳細寫下證明及理由，考試時間四小時。

1. 設 p 為一質數和 a、n 為正整數。若 $2^p+3^p=a^n$，證明 n=1。

證：若 p=2，有 2^p+3^p=13 及 n=1。若 p>2 時，p 是奇，所以 5 整除 2^p+3^p 因而 5 整除 a。若 n>1，則 25 整除 a^n 而且 5 整除 $(2^p+3^p)/(2+3)=2^{p-1}-2^{p-2}.3+...+3^{p-1}\equiv p2^{p-1}(\text{mod}5)$， 但若 p≠5 這是不可能的。最後，若 p=5 時，則 2^p+3^p=753 不是個完全冪，因此 n=1。1996 年愛爾蘭數學比賽

2. 設四個正實數 a、b、c、d 滿足 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2>3(a^4+b^4+c^4+d^4)$。求證：$a$、$b$、$c$、$d$ 這四個數中任何三個一定是某個三角形的三條邊長。

$3(a_1^4+a_2^4+...+a_4^4)$
$<(a_1^2+a_2^2+...+a_4^2)^2$
$=[(a_1^2+a_2^2+a_3^2)/2+(a_1^2+a_2^2+a_3^2)/2+a_4^2)]^2$
$\leqq 3[(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2/4+(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2/4+a_4^{44}]$
$=3[(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2/2+a_4]$
即 $2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)<(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2$，從(1)得到{$a_1$, a_2, a_3}三邊是三角形的邊長。

3. 設 a_1、a_2、a_3、…、a_n 是任意整數($n\geq 5$)。證明：可以從中選擇若干個數，並在各數之前添上“+”或“−”號，使得到的代數和能被 2010^2 整除。

證：考慮{a_1, a_2, a_3, ..., a_n}的所有子集，共 2^n 個，然後考慮每個子集的元素和，共 2^n 個。(註：空集的元素和定義為 0)。當 n≧5 時，有 $2^n\geq n^2$，由抽屜原理模 n^2 後，必有兩個子集的元素和相同。特別地，兩個和之差是某些元素的代數和，其係數只能是 0、1 或-1。

4. 如圖所示，已知有一正七邊形 $ABCDEFG$，且直線 DG 與直線 CE 的交點為 X、直線 AB 與直線 CE 的交點為 Y、直線 AB 與直線 DG 的交點為 Z。請證明直線 BX、直線 DY 與直線 EZ 三線共點。

