注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用 IMC 各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製本資料的任何部分，必須獲得 IMC 行政委員會的授權許可。

申請此項授權請電郵 IMC 行政委員會主席孫文先

ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the IMC Executive Board. Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 1999

1999 青少年數學國際城市邀請賽隊際競賽試題

1. (a) 試分解$9^8+7^6+5^4+3^2+1$成質因數的乘積。
   (b) 試找出$2^{30}+3^{20}$的任意兩個質因數。

2. 請利用所附的空白名片上分別寫上整數 1、3、5、…、59，每張卡片只寫上一個數。
   (a) 試問數字名片1、3、5、7、9、11、13、15、17、19這十張卡片應作如何排列成一疊，使得這些卡片滿足下列條件：
   如果自這一疊卡片最上面的第一張取出放在最底下後，第二張卡片的數出現是1，則1的這張卡片取出放在旁邊；然後在剩下的卡片中自最上面取出3張依序放到最下面，接著最上面的數字卡片是3。把3的這張卡片取出放在旁邊；依此方式重複前面的步驟取出$2k+1$張卡片，其中$2\le k\le 8$，並依序放到最下面，則最上面一張數字卡出現$2k+1$，再把$2k+1$的這張卡片取出放在旁邊，最後一張是19。
   請寫出你們原來的數字卡片的排列之順序。
   (b) 試仿造小題(a)的做法，若數字名片為1、3、5、…、59時，試問應作如何排列成一疊，使得這些卡片滿足下列條件：
   如果自這一疊卡片最上面的第一張取出放在最底下後，第二張卡片的數出現是1，則1的這張卡片取出放在旁邊；然後在剩下的卡片中自最上面取出3張依序放到最下面，接著最上面的數字卡片是3。把3的這張卡片取出放在旁邊；依此方式重複前面的步驟取出$2k+1$張卡片，其中$2\le k\le 8$，並依序放到最下面，則最上面一張數字卡出現$2k+1$，再把$2k+1$的這張卡片取出放在旁邊，最後一張是59。
   請寫出你們原來的數字卡片的排列之順序。

3. (a) 試找一組相異正整數包含 5 這個數，使得它們的倒數的總和是 1。
   (b) 試找一組相異正整數包含 1999 這個數，使得它們的倒數的總和是 1。

4. (a) 試將一個正方形剛好分割成 1999 個內部沒有重疊部分的小正方形，這些小正方形大小可以不等；需列出解題過程並說明理由。
   (b) 請將圖(1)陰影部分沿格線剪下並分解成 10 片或更少的片數填滿所附之圖(2)（中間有 2×2 的洞）。你們的答案必須清楚地表明切開的片數，黏貼時容許部分圖片翻轉。（需有解題過程並說明理由）

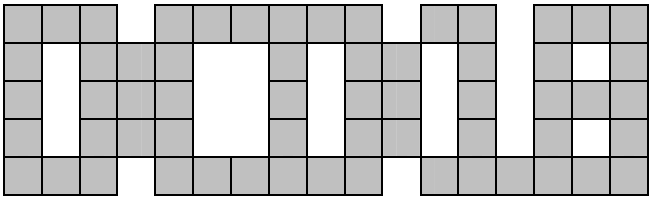


圖 (1)

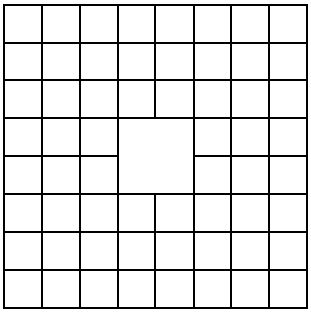


圖 (2)

5. 有一個邊長為 5 的正方形分割成 25 個小正方形使每一行，每一列恰有五個單位長的正方形。把數字 1、2、3、4、5 填入這些小正方形中使得 1、2、3、4、5 的每一個數字在每一行，每一列和每一對角線上的五個小正方形的數字恰好出現一次，從左上到右下的對角線正下方的四個小正方形上的數字之和稱為這個正方形的分數。
試問這個正方形的最高分數是多少？說明你的理由及構造這樣的正方形。如果你們構造的正方形的分數不是最高，你們仍有部分成績。

