注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用 IMC 各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製本資料的任何部分，必須獲得 IMC 行政委員會的授權許可。

申請此項授權請電郵 IMC 行政委員會主席孫文先

ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the IMC Executive Board. Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2000

2000 青少年數學國際城市邀請賽個人競賽試題

第一部份：填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 17^{2000} 的個位數字為_____。

2. 從 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{15}$、$\frac{1}{18}$ 中去掉兩項，使得於下各項的和等於 $\frac{2}{3}$，則所去掉的這兩項的乘積為_____。

3. 設 A 為小於 1000 且大於 100 的奇數，若 A 的百位數大於它的個位數，且 A 是 11 的倍數，則滿足這些條件所有可能的 A 值中最小者為_____。

4. 將介於 150 與 650 之間除以 10 餘 4 的整數全部相加的總和為_____。

5. 設 N=111…1222…2，其中 1 有 2000 個、2 有 2000 個；若 N 被 $\underbrace{666\cdots6}_{2000個}$ 除時，則其商數是_____。

6. 著名的哥德巴赫(Goldbach)猜想是：對於任一個大於 7 的偶數一定可以表示為兩個不同質數的和，例如 10 = 3+7；我們希望找到不同質數 p、q 使得 $p+q = 192$，並讓 $2p-q$ 越大越好，則數對(p, q)=_____。

7. 在△ABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 上的一點，若 $\overline{AC}=\overline{CD}$ 且 $\angle CAB = \angle ABC + 45°$，則 $\angle BAD$ 的度數為_____。

8. 已知$100000035811ab1^2 = 1000000cde2247482444265735361$，其中 a、b、c、d、e 皆為小於 10 的非負整數，則 $a+b+c-d-e$ 的值為_____。

9. 在長方形 $ABCD$ 中，P 為此長方形內部的一點。若 $\overline{PA}=4$、$\overline{PB}=6$、$\overline{PD}=9$，則 $\overline{PC}$ 的長度為_____。

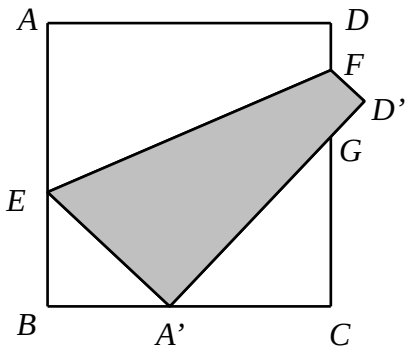
10. 某種新的溫度計的水結冰時顯示的度數為 20 度，在水煮沸時為 160 度(攝氏溫度計水的冰點為 0 度，沸點為 100 度)，則攝氏 215 度相當於該種新的溫度計_____度。

11. 已知一正方形 $ABCD$ 內接於圓 O，將此圓對折成一個半圓，作正方形 $EFGH$ 使其內接於此半圓，則正方形 $EFGH$ 之面積與正方形 $ABCD$ 之面積的比為_____。

12. 有一疊 10 張紙牌，每張紙牌上都印有一個正整數，已知連續的三張紙牌上的正整數的和都是 20，且第一張紙牌上的數為 2，第九張紙牌上的數為 8，則第五張紙牌上的數為_____。

第二部份、計算證明題共三小題，每題 20 分（請寫在答案卷對應題號內，需詳列出計算證明過程）

1. 摺疊一正方形的紙張 $ABCD$，使得 A 點落在 $\overline{BC}$ 邊上 A' 點的位置，及 D 點落在 D' 點的位置，這樣我們得到摺線 $\overline{EF}$ (如圖所示)，其中 E 點在 $\overline{AB}$ 邊上、F 點在 $\overline{CD}$ 邊上，摺疊後，$\overline{A'D'}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 G 點。試證：$\overline{A'E}+\overline{FG}=\overline{A'G}$。



2. 有十張正面與反面都寫上一個正整數的卡片，這十張卡片上面的 20 個正整數都不同，每張卡片的正反兩面上的數之和都相等，且所有十張卡片正面之數的總和等於所有十張卡片反面之數的總和。若其中九張卡片正面之數分別為 2、5、17、21、24、31、35、36、42，試問第十張卡片正面的數為多少？

3. 從 100 到 999 的每一個正整數皆稱為三位數，從 1000 到 9999 的每一個正整數皆稱為四位數；任一個正整數組成它的每一個數字相加的和稱為該正整數的數字和，例如 312 的數字和為 6。假設 a、b、c 皆為正整數，其中 a、b 為三位數，c 為四位數，若 $a+b$、$b+c$ 和 $c+a$ 的數字和都等於 3，試問 $a+b+c$ 最大的值為多少？