注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用 IMC 各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製本資料的任何部分，必須獲得 IMC 行政委員會的授權許可。

申請此項授權請電郵 IMC 行政委員會主席孫文先

ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the IMC Executive Board. Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

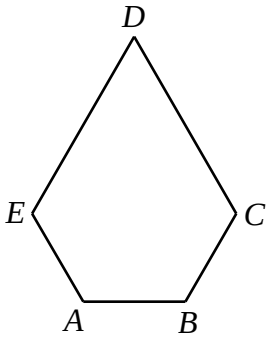
Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2001

2001 青少年數學國際城市邀請賽個人競賽試題

第一部份：填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十題，每題 6 分。

1. n 為整數，若 $1+2+\ldots+n$ 的和恰等於一個三位數，且此三位數的每個數字皆相同。試找出所有可能的 n。

2. 五邊形 $ABCDE$〈如圖〉中，$\angle A=\angle B=120°$、$\overline{EA}=\overline{AB}=\overline{BC}=2$、$\overline{CD}=\overline{DE}=4$。試求五邊形 $ABCDE$ 的面積。



3. 若將一個 6 厘米 ×6 厘米的正方形蓋在一個三角形上，則最多可蓋住此三角形 60% 的面積。反之，若將此三角形蓋在此正方形上，則最多可蓋住此正方形 $\frac{2}{3}$ 的面積。試求這個三角形的面積。

4. 有一組連續的四個正整數，從小到大依次排列，第一個數是 5 的倍數；第二個數是 7 的倍數；第三個數是 9 的倍數；第四個數是 11 的倍數。試求此四個連續正整數。

5. 在 5 時到 6 時之間，某人看錶時，由於不慎將時針看成分針，造成他看到的時間比正確的時間大約早了 55 分鐘。試問他看到的時間比正確的時間實際上早了幾分鐘？

6. $\triangle ABC$ 的內切圓分別與三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 切於 D、E、F。若內切圓半徑為 4，且 $\overline{BD}$、$\overline{CE}$、$\overline{AF}$ 之長是連續整數。試求 $\triangle ABC$ 的三邊長。

7. 試求出所有的質數 P，使得下列方程組有整數解：

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2 \end{cases}$$

8. 解方程式：$\sqrt{3x^2-18x+52}+\sqrt{2x^2-12x+162}=\sqrt{-x^2+6x+280}$。

9. 化簡 $\sqrt{12-\sqrt{24}+\sqrt{39}-\sqrt{104}}-\sqrt{12+\sqrt{24}+\sqrt{39}+\sqrt{104}}$。

10. 設 M = 1010101…01，其中數字 1 出現 k 次。試求出最小的 k 值使得 M 能被 1001001001001 整除。

第二部份： 計算及證明題，請在題目下面空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. a、b 為兩個相異的正實數。若 $A=\dfrac{a+b}{2}$ 、$G=\sqrt{ab}$ ，試證： $G<\dfrac{(a-b)^2}{8(A-B)}<A$

2. 試確定實數 p 的範圍，使得方程式 $3^{2x}-3^{x+1}=p$ 有兩個相異正實數解。

3. 已知一個正方形的四個頂點落在一個銳角三角形的邊上，其中二條邊上各有一個頂點而第三條邊上有二個頂點。若要使這個正方形的面積最大，請問有二個頂點落在上面的邊之邊長應該是最長的，或是最短的，或是以上兩者皆不是？請證明你的答案。