注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

「2006 年青少年數學國際城市邀請賽」
參賽代表遴選決選試題

編號:_____校名:_____ 國中　姓名:_____

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 設 a,b,c 為實數，若 $a+b=7, b+c=9, a+c=8$, 則 $abc=$_____。

Ans: 60

2. 設 a,b 為實數，若 $\frac{a+3b}{a-b}=3$，則 $\frac{a}{b}=$_____。

Ans: 3

3.已知一個梯形的四邊長分別? 1,2,3,4,則此梯形的面積為_____。

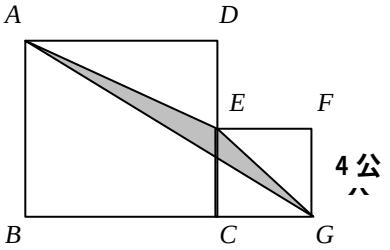
Ans: $\frac{10}{3}\sqrt{2}$

4.如果正整數 n 小於 100，且滿足條件 $[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{3}]+[\frac{n}{6}]=n$, 其中 $[x]$ 表示不超過實數 x 的最大整數，則滿足這樣條件的正整數 n 共有_____個。

Ans: 16

5. 如圖， $ABCD$ 和 $CEFG$ 為兩個正方形， $\overline{FG}=4$ 公分，
則 ΔAEG 的面積為_____平方公分。

Ans: 8



6. 若 $\frac{a}{3b}=\frac{b}{2a-5b}=\frac{6a-15b}{a}$, 則 $\frac{4a^2-5ab+6b^2}{a^2-2ab+3b^2}$ 的值為_____。

Ans: $\frac{9}{2}$

7. 3^{2006} 的最後 2 位數是多少？_____。

Ans: 29

$3^4=81$, 且 $3^{64}\equiv 81^{16}\equiv 81\equiv 3^4 \pmod{100}$.

8.已知正三角形 ABC 的邊長？ 2, M 是 $\overline{AB}$ 邊的中點， P 是 $\overline{BC}$ 邊上任意一點，如果 $\overline{PA}+\overline{PM}$ 的最大值和最小值分別表？ a 和 b ,則 $a^2-b^2=$_____。

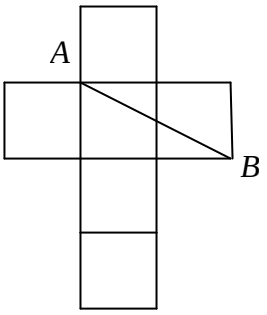
Ans: $4\sqrt{3}$

9. 有一本書從第一頁起開始連續為每一頁編號，總共用了 852 個數字，則這本書的頁數是_____。

Ans: 320

10.下圖是由六個大小相同的正方形所組成的一個十字圖形，每個正方形只有邊重合，已知 $\overline{AB}=10$ 公分，則此十字形的面積為_____平方公分？

Ans: 120

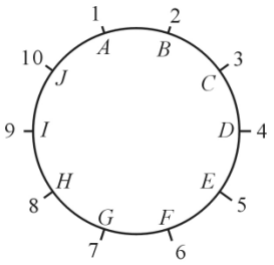


11.有一個四位數滿足下列條件：用此四位數的末二位數(如果它的十位數是零,就只用個位數字)去除此四位數,其商為一個完全平方數,且這個完全平方數正好是原四位數的前二位數加 1 以後的平方, 則滿足這種條件的四位數中最大為_____。

Ans: 9801

12.如圖，有十個人圍成一圓圈，且依座號 $1, 2, 3, \cdots, 10$ 而坐。每人選擇一整數，分別是 $A, B, C, \cdots, J$ ，並將這個數告訴他左右兩個鄰座的人。每人跟著算出他左右兩個鄰座所選的數的算術平均數。若每個人所算出的算術平均數與其座號相等，則 F 的值等於_____。

Ans: 1



第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 a,b,c 皆為整數，其中 $1<a<b<c$,如果 $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ 能被 abc 所整除，試求 a,b,c 的值。

(解)：

(1)∵ $a,b,c\in N$ 且 $1<a<b<c$

∴依題意 $\dfrac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc}=k \quad k\in N$

$\Rightarrow abc-(a+b+c)+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=k \quad k\in N$

又∵ $1<a<b<c$ 且 $a,b,c\in N$

∴ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=\dfrac{ab+bc+ca-1}{abc}>0$

(2)令 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=n\in N$

∵ $1<a<b<c \Rightarrow 1>\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ ， $a,b,c\in N$

∴ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 最大值為 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}<2$， $\dfrac{1}{abc}$ 最大值為 $\dfrac{1}{24}<1$

∴ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}<2$

$ie \ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=n=1$

(3) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=\dfrac{ab+bc+ca-1}{abc}=1$

$\Rightarrow ab+bc+ca=abc+1$

①若 a,b,c 為三偶數 $\Rightarrow$ 偶+偶+偶=偶?奇=偶+1 (不合)

②若 a,b,c 為二偶數一奇數 $\Rightarrow$ 偶+偶+偶=偶?奇=偶+1 (不合)

③若 a,b,c 為一偶二奇 $\Rightarrow$ 偶+偶+奇=奇=偶+1 (合)

④若 a,b,c 為三奇數 $\Rightarrow$ 奇+奇+奇=奇?偶=奇+1 (不合)

∴由(1)(2)(3)知：

$a,b,c\in N$ 其中有一偶數二奇數

且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>1$， $\dfrac{1}{abc}<1$ ， $1<a<b<c$

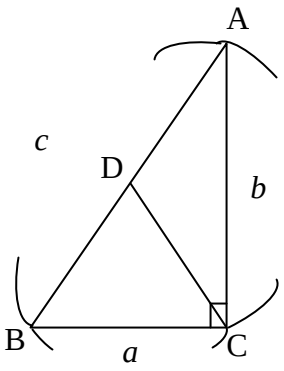
只有 $a=2$， $b=3$， $c=5$ 符合題意

2. 直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$,如果其週長為 $2\sqrt{7}+4$,且斜邊上的中線長為 2,試求 ΔABC 的面積與其內切圓的面積。

(解)：

(1)設 D 為 $\overline{AB}$ 中點，$\therefore \overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=2$ $\therefore \overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=4$

令 $\overline{AB}=c=4$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，如圖：



又 $\because a+b+c=2\sqrt{7}+4$

$\therefore a+b=2\sqrt{7}$

$c^2=a^2+b^2=4^2=16$

$\therefore \Delta ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{4}\left[(a+b)^2-(a^2+b^2)\right]$

$=\frac{1}{4}\left[(2\sqrt{7})^2-16\right]=3$

$\Rightarrow ab=6$

(2)設圖 o 為 ΔABC 之內切圓，分別切三邊於 E,F,G，如圖

則 $\overline{OG}=\overline{OF}=\overline{CG}=\overline{CF}=r$ (內切圓半徑)

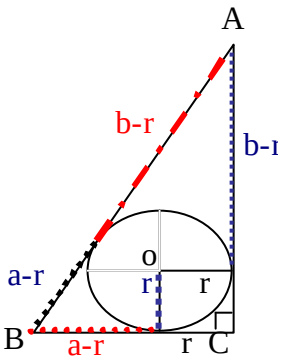
$\therefore \overline{AG}=\overline{AE}=b-r$，$\overline{BF}=\overline{BE}=a-r$

$\therefore a-r+b-r=\overline{AB}=c=4$

$\Rightarrow a+b-2r=4$

$\therefore r=\frac{a+b-4}{2}=\frac{2\sqrt{7}-4}{2}=\sqrt{7}-2$

$\therefore$ 內切圓 o 面積 $=p\ r^2=p\ (\sqrt{7}-2)^2=p\ (11-4\sqrt{7})$



3. 四邊形 $DEGF$ 中，$\overline{DE}=\overline{DF}$，$\overline{GE}=\overline{GF}$，$\angle DEG=90^\circ$ 和 $\angle DFG=90^\circ$，A 是 $\overline{EF}$ 和 $\overline{DG}$ 的交點。J 是 $\overline{EG}$ 延長線上的一點，過 E 作 $\overline{FJ}$ 的平行線，和 $\overline{FG}$ 的延長線相交於 I，H 是 D 到 $\overline{IJ}$ 的垂足。試證 A，F，J 和 H 共圓。

(參考解法)：

連 AJ 和 ID，

因為 FGJ 及 IGE 是相似三角形，

所以 JG/GF = EG/GI，

又因為 FAG 和 DEG 是相似三角形，

所以 GF/AG = DG/EG。

相乘後得出 JG/AG = DG/IG，

因為∠JGA=∠DGI，

所以 JAG 和 DIG 是相似三角形，

得出∠JAG=∠DIG。

而∠JAF=90°-∠JAG=90°-∠DIG=∠IDF。

因為 D，I，H 和 F 共圓，∠IDF+∠IHF=180°，

所以∠JAF+∠JHF=180°，A，F，J 和 H 共圓。

