注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2009 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人數學競賽試題

編號：＿＿＿＿＿＿　校名：＿＿＿＿＿＿國中　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. 計算$\left(\frac{1}{1000}+\frac{2}{1000}+\ldots+\frac{999}{1000}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{2}{1001}+\ldots+\frac{1000}{1001}\right)+\left(\frac{1}{1002}+\frac{2}{1002}+\ldots+\frac{1001}{1002}\right)+\cdots$
$+\left(\frac{1}{2009}+\frac{2}{2009}+\cdots+\frac{2008}{2009}\right)=$＿＿＿＿＿＿。

2. $(3^{2008}+4^{2009}+7^{2010})$被 5 除之餘數為＿＿＿＿＿＿。

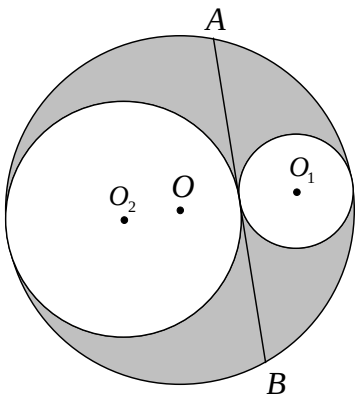
3. 設 n 為正整數，若 $a^{2n}=5$，則 $2a^{6n}-4$ 的值為＿＿＿＿＿＿。

4. 設 a、b、c 為正實數，且 $a+b+c=7$ 及 $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{10}{7}$。則
$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 之值為＿＿＿＿＿＿。

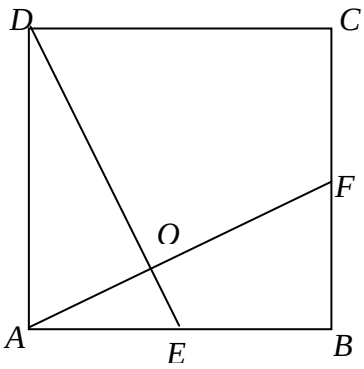
5. 從 1 開始依次將自然數寫在一條很長的紙帶上，123456789101112131415…，然後依每三個數碼的長度將紙帶剪成小紙片，例如 123, 456, 789, 101, 213, 141, …。第一張小紙片出現的數碼是 123，則下一張紙片上的數碼為 123 的是第＿＿＿＿＿＿張。

6. 給定 $f(5)=10$ 且對所有 n，$f(n+3)=\frac{f(n)-1}{f(n)+1}$。則 $f(2009)$ 的值是＿＿＿＿＿＿。

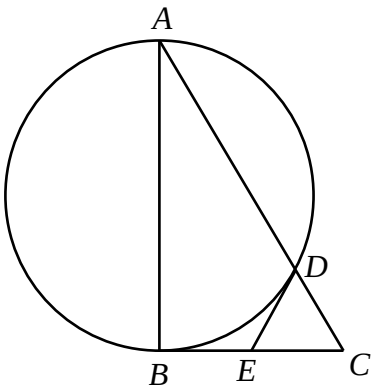
7. 半徑都不相等的三圓兩兩互相相切，如圖所示。若兩小圓的內公切線在大圓內部的部分 $AB=12$cm，則圖中陰影部分的面積為 ＿＿＿＿＿＿cm^2。



8. 正方形 $ABCD$ 中，E、F 分別為 AB、BC 的中點，AF 與 DE 相交於點 O，如下圖所示，則 $\frac{AO}{DO}=$ _____ 。

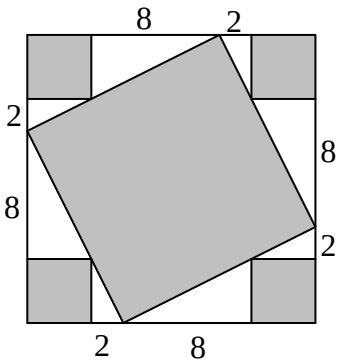


9. 三角形 ABC 為一直角三角形，$\angle ABC=90^\circ$，AB 長為 10，以 AB 為直徑畫一圓交斜邊 AC 於 D 點，線段 AD 長為 8。過 D 點作圓的切線交 BC 邊於 E 點，如下圖所示，則線段 EC 的長= _____ 。



10. 若 a, b, c, d 為四個相異的有理數，且滿足 $(a-c)(a-d)=2$ 與 $(b-c)(b-d)=2$ ，則 $(a-c)(b-c)=$ _____ 。

11. 在一個大正方形內部有五個塗陰影的小正方形，如下圖所示，其部份線段長度已經標記在圖上，則五個塗陰影正方形的面積之總和＝_____。



12. 滿足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2009}$ 的正整數數對 (x,y) 共有_____組。

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 設 $P = 13x + 52y$ 為完全立方數， 且 P 為不超過 2400 的正整數，請問符合以上條件的正整數解(x, y)共有幾組？

2. 已知 n 為整數，若代數式 $9n^2 + 23n - 2$ 的值恰可以分解為兩個連續正偶數的乘積，試求所有可能的 n 值。

3. 已知O_1、O_2、O_3為三個半徑不同且互不相交的圓，A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2分別為其直徑，點P為平面上任意一點，如圖所示。

若$PA_1+PB_1+PC_1<PO_1+PO_2+PO_3$，試證明$PA_2+PB_2+PC_2>PO_1+PO_2+PO_3$。

