注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

「2009 年青少年數學國際城市邀請賽」

參賽代表遴選初選

個人數學競賽試題

編 號: _____ 校 名: _____ 國中　　姓 名: _____

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 從 1 到 2009，所有 7 的倍數之和為_____。

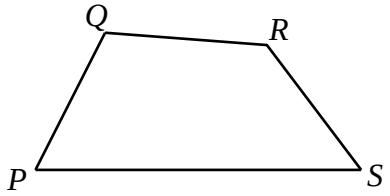
2. 一個長方形，如果長減少 5 公分，寬減少 2 公分，那麼面積就減少 66 平方公分，這時剩下的部分恰好成為一個正方形。請問原來長方形的面積為多少平方公分？_____

3. 斐波那契數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …，它的首兩項都等於 1，之後的每一項都等於其前兩項的和。請問在斐波那契數列的首 2009 項中，有多少項是 10 的倍數？_____

4. 如果 $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+x}}$，則 x 等於_____。

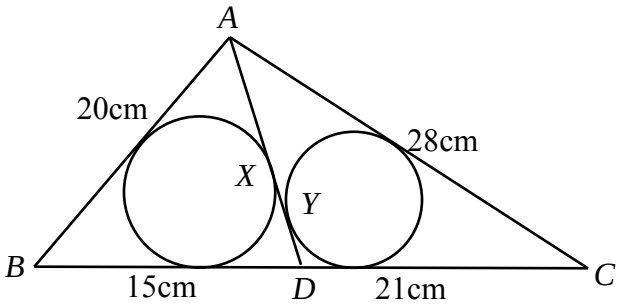
5. 若將乘積 1 × 3 × 5 × 7 × … ×2007 ×2009 寫成一個數，請問此數的末三位數字是多少？_____

6. 四根鐵桿在其端點用活動接頭連接在一起，構成如圖所示的一個四邊形。桿 PQ、QR 和 RS 之長都為 120 cm，桿 PS 之長為 240 cm。轉動接頭使得 QR 的中點與桿 PS 儘量靠近，請問其最小距離為多少 cm？_____

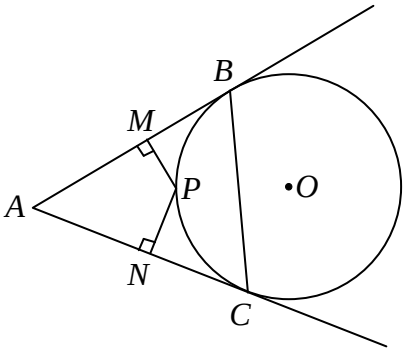


(翻面繼續作答)

7. 如圖，△*ABC*、△*ADC* 的內切圓分別切 *AD* 於點 *X*、*Y*。已知 *AB*=20 cm、*AC*=28 cm、*BD*=15 cm、*CD*=21 cm，請問線段 *XY* 之長為多少 cm？_____



8. 如圖，*AB*、*AC* 分別切圓 *O* 於 *B*、*C* 兩點，*P* 為 *BC* 弧上一點，且 *PM*⊥*AB*、*PN*⊥*AC*。若 *PM*=4、*PN*=5，則 *P* 點到 *BC* 的距離為_____。



9. 將一堆整數作如下圖的排列：

0	第 1 列
1 1	第 2 列
2 2 2	第 3 列
3 4 4 3	第 4 列
4 7 8 7 4	第 5 列
5 11 15 15 11 5	第 6 列
⋮	⋮

令 $f(n)$ 表示第 n 列上的所有整數之和，則 $f(100)=$_____。

10. 已知函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x)=-f(x)$，$f(1)=1$，$f(2)=2$ 且對於 $x\ge -1$，$f(x+1)=f(x+4)$。則

$(-1)f(1)+(-1)^2 f(2)+(-1)^3 f(3)+\cdots+(-1)^{100} f(100)=$_____

11. 有三隻跳蚤，一開始分別位於數線上 0、1、2 的位置。每一次都由最左邊的跳蚤開始起跳，並以最右邊的跳蚤為對稱中心向右跳躍，落在對稱的位置上（如第一次 0→4、第二次 1→7 等等）。請問經過 8 次的跳躍之後，最右邊的跳蚤在數線上的位置所代表的數是多少？_____

12. 兩個容器 A 與 B，A 中裝有一公升的水，B 是空的。第 1 次將 A 中水量的 $\frac{1}{2}$ 倒入 B 中；第 2 次將 B 中水量的 $\frac{1}{3}$ 倒入 A 中；第 3 次將 A 中水量的 $\frac{1}{4}$ 倒入 B 中，…，如此繼續操作，第 N 次倒入的水量為 $\frac{1}{N+1}$。假設倒水的過程中，水的總量沒有減少，在經過第 20 次操作之後停止，則在容器 A 中有 _____公升的水。

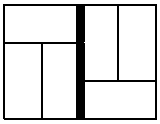
第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

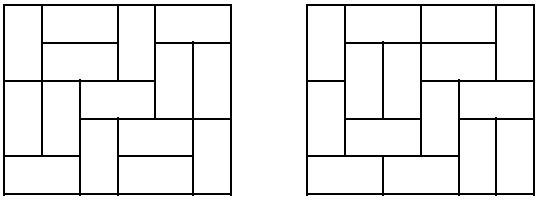
1. △*ABC* 為直角三角形，∠*ABC*=90°、∠*ACB*=30°且 *BD*⊥*AC*、*AB*=12 cm。過 *A* 做 *BC* 的平行線 *L*，在 *L* 上找一點 *E* 使得∠*DEC*=30°。試求所有滿足上述條件的 *AE* 之可能長度。

(翻面繼續作答)

2. 用長為 1 寬為 2(不考慮厚度)的磚砌牆。砌出的牆如有貫穿全圖左右或上下的直線出現，稱此為瑕疵線。



5×6 的矩形牆可用以下兩種方式砌成**沒有**瑕疵線的牆：



請問 6×6 的矩形牆是否可以砌成**沒有**瑕疵線的牆？如果可以，請舉出一個例子；如果不能，請證明。

3. 設 a 為正整數且 $a+60$ 與 $a-60$ 均為完全平方數，試求 a 的所有可能值。