注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2012 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽

個人賽試題

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，只需寫出答案，答案若為分數請化為最簡分數)

1. 有 145 個花盆要排成 32 排，若每排最少排 1 個花盆最多排 8 個花盆，那麼至少有_____排的花盆數相同。

【參考解法】

要使相同數目的花盆數最少，則要使不同數目的花盆數盡可能相等。因每一排的花盆數可為 1、2、3、4、5、6、7、8 共八種，因此若不考慮總數量而只要求不同數目的花盆數盡可能相等時，32 排可分配花盆數 1 至 8 各 4 排，此時總數量為(1+2+3+4+5+6+7+8)×4=144，除了已放置 8 盆的 4 排以外，只需任意再加 1 盆於其他排即可得到 145 盆，因此至少有 4+1=5 排的花盆數是相同的。

答：5 排

2. 等腰三角形 ABC 中，$AB = AC = 12$，E 為 AC 邊上的一點，F 為 AB 邊上的一點，如下圖所示。已知四邊形 $BCEF$ 的面積為三角形 AEF 面積的三倍，且 AF 的長為 4，則 AE 的長為_____。

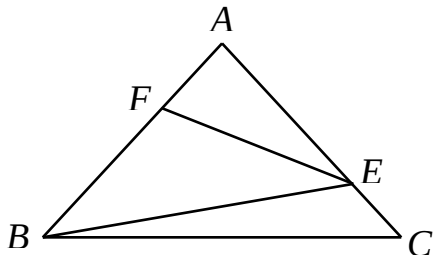
【參考解法】

令三角形 AEF 面積為 a，則知四邊形 $BCEF$ 的面積為 $3a$；

再由 $AF：FB=4：(12－4)=1：2$ 知三角形 BEF 面積為 $2a$，故三角形 BEC 面積為 a，

因此 $AE：EC=(a+2a)：a=3：1$，

故可知 $AE=\frac{3}{3+1}\times 12=9$。



答：9

3. 甲、乙、丙、丁四人參加網球賽，任意兩人都恰進行一場比賽。結果沒有平手，勝場數最多者比勝場數最少者多勝兩場，甲的勝場數多過乙的勝場數，且乙丙對峙時由乙獲勝。則甲共勝了_____場。

【參考解法】

此為四人的單循環比賽，故知共比賽 6 場，即四人合計 6 勝、一人至多 3 勝且至多一人 3 勝。故現考慮 6 分拆為四個不超過 3 的非負整數和的方式，由勝場數最多者比勝場數最少者多勝兩場知只有二種情形：6=0+2+2+2=1+1+1+3。

因甲勝場數多過乙，故知甲有 2 場勝利或 3 場勝利。

若甲有 2 場勝利，則此時四人勝場數為 0、2、2、2，故乙有 0 場勝利，但此與乙勝過丙矛盾，故知甲必有 3 場勝利，此時四人勝場數為 1、1、1、3，即乙、

丙、丁各有 1 場勝利，且由乙勝過丙知其勝負關係如下表：

	甲	乙	丙	丁
甲				
乙	甲勝乙			
丙	甲勝丙	乙勝丙		
丁	甲勝丁	丁勝乙	丙勝丁	

答：3 場

4. 實數 a、b 滿足 $a^2+5a+5=5b^2+15b+9=0$，若 $ab\neq 3$，則 $\dfrac{a^2-ab}{b^2+ab}$ 之值為_____。

【參考解法】

可知 $a=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-20}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$、$b=\dfrac{-15\pm\sqrt{225-180}}{10}=\dfrac{-15\pm 3\sqrt{5}}{10}$ 而 $\dfrac{a^2-ab}{b^2+ab}=\dfrac{a(a-b)}{b(b+a)}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a-b}{b+a}$。故分成以下四種情形討論：

(i) $a=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$、$b=\dfrac{-15+3\sqrt{5}}{10}$，則

$$\frac{a}{b}\times\frac{(a-b)}{(b+a)}=\frac{\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{-15+3\sqrt{5}}{10}}\times\frac{(\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2})-(\dfrac{-15+3\sqrt{5}}{10})}{(\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2})+(\dfrac{-15+3\sqrt{5}}{10})}=\frac{5}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

(ii) $a=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$、$b=\dfrac{-15-3\sqrt{5}}{10}$，則 $ab=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{-15-3\sqrt{5}}{10}=3$，不合；

(iii) $a=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$、$b=\dfrac{-15+3\sqrt{5}}{10}$，則 $ab=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{-15+3\sqrt{5}}{10}=3$，不合；

(iv) $a=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$、$b=\dfrac{-15-3\sqrt{5}}{10}$，則

$$\frac{a}{b}\times\frac{(a-b)}{(b+a)}=\frac{\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{-15-3\sqrt{5}}{10}}\times\frac{(\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2})-(\dfrac{-15-3\sqrt{5}}{10})}{(\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2})+(\dfrac{-15-3\sqrt{5}}{10})}=\frac{5}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

故所求為 $\dfrac{5}{12}$。

答：$\dfrac{5}{12}$

5. 把數碼 1、2、3、4、5、6、7、8、9、0 各恰用一次，組成兩個五位數 m 和 n，當 m 和 n 相乘之積為最大時，$m+n$ 之值為_____。

【參考解法】

因要使 m 和 n 之乘積為最大，故不妨令 m 的首位數為 9、n 的首位數為 8，即

令　$m=\overline{9abcd}=9\times10^4+a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$ 、

$n=\overline{8efgh}=8\times10^4+e\times10^3+f\times10^2+g\times10+h$ 。

觀察 $(9\times10^4+a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d)(8\times10^4+e\times10^3+f\times10^2+g\times10+h)$，要使之最大，即要使 $10^4\times10^3=10^7$ 之係數為最大，因此需使 $9e+8a$ 之值為最大，故取 $e=7$、$a=6$；

此時 10^8、10^7、10^6 的係數皆已決定，故要使 10^5 之係數為最大，因此需使 $96f+87b$ 之值為最大，故取 $f=5$、$b=4$；

此時 10^8、10^7、10^6、10^5、10^4 的係數皆已決定，故要使 10^3 之係數為最大，因此需使 $964g+875c$ 之值為最大，故取 $g=3$、$c=2$；

此時 10^8、10^7、10^6、10^5、10^4、10^3、10^2 的係數皆已決定，故要使 10 之係數為最大，因此需使 $9642h+8753d$ 之值為最大，故取 $h=1$、$d=0$。

故這二數為 96420、87531，其和為 183951。

答：183951

6. 將 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 這十個正整數依照某一種順序排成一列，使得任意相鄰三個整數的和都不超過 n，則滿足此條件的 n 之最小值為_____。

【參考解法】

令下表為這十個正整數所排出的位置：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}

由對稱性可假設 10 位於 a_1 至 a_5 其中之一。

觀察可知無論 10 與 9 位於那個位置，與它們相距在二個格子內的數至少共有 4 個，而這六個數的總和至少為 10+9+1+2+3+4=29，故可知 $n\geq15$。

若 $n=15$，則能與 10 相距在二個格子內的數只有 1、2、3、4 且能與 9 相距在二個格子內的數只有 1、2、3、4、5。

若 10 位於 a_1，則觀察能填入與這二個數相距二格的數字個數後知 9 只能位於 a_4、a_5 或 a_9。

若 9 位於 a_5 或 a_9，則必有連續三格只能填入 6、7、8，其和為 21，與 $n=15$ 矛盾，故不合；

若 9 位於 a_4，則 a_7、a_8、a_9、a_{10} 為了滿足 $n=15$，僅可為 1、6、7、8 的某個組合，可推知 5 必須位於 a_5 或 a_6；但 5 與 1 必須同時出現在 9 的同一側的二個格子內，即 1 也必須位於 a_5 或 a_6，矛盾。

若 10 位於 a_2，則觀察能填入與這二個數相距二格的數字個數後知 9 只能位於 a_5 或 a_{10}，則必有連續三格只能填入 6、7、8，其和為 21，與 $n=15$ 矛盾，故不合。

若 10 位於 a_3，則觀察能填入與這二個數相距二格的數字個數後發現知 9 無法填入，故不合。

若 10 位於 a_4，則觀察能填入與這二個數相距二格的數字個數後知 9 只能位於 a_1，則 a_7、a_8、a_9、a_{10} 為了滿足 n=15，僅可為 1、6、7、8 的某個組合，與 1 必須位於與 10 相距在二個格子內的條件矛盾，故不合。

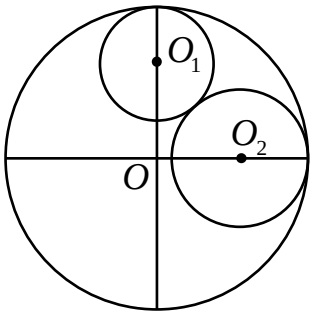
若 10 位於 a_5，則觀察能填入與這二個數相距二格的數字個數後知 9 只能位於 a_1 或 a_2，則 a_8、a_9、a_{10} 只能填入 6、7、8，其和為 21，與 n=15 矛盾，故不合。

若 n=16，則以下方式為其中一種排法：

10、5、1、8、2、6、7、3、4、9。

答：16

7. 圓 O_1、圓 O_2、圓 O 兩兩相切，且圓 O_1 與 O_2 的圓心分別在圓 O 的兩條互相垂直的直徑上，如右圖所示。已知圓 O 的半徑長為 α cm，且圓 O_1 與 O_2 面積之和的最小值為 $\beta\pi$ cm^2，則 $\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ 之值為_____。



【參考解法】

可令圓 O_1 半徑為 x、圓 O_2 半徑為 y，則由畢氏定理知

$$(x+y)^2=(\alpha-x)^2+(\alpha-y)^2$$

$$x^2+2xy+y^2=2\alpha^2-2x\alpha-2y\alpha+x^2+y^2\ 。$$

$$xy=\alpha^2-(x+y)\alpha$$

此時由 $(x+y)^2\geq 4xy$，其中當 x=y 時等號成立，可推知 $(x+y)^2\geq 4(\alpha^2-(x+y)\alpha)$，即

$$(x+y)^2+4(x+y)\alpha+4\alpha^2\geq 8\alpha^2$$

$$(x+y+2\alpha)^2\geq 8\alpha^2$$

$$x+y\geq 2\sqrt{2}\alpha-2\alpha$$

而圓 O_1 與 O_2 面積之和為 $\pi(x^2+y^2)$，故以上關係式可得

$$\begin{aligned}\pi(x^2+y^2)&=\pi((x+y)^2-2xy)\\&=\pi((x+y)^2-2(\alpha^2-(x+y)\alpha))\\&=\pi((x+y)^2+2(x+y)\alpha-2\alpha^2)\\&\geq\pi((2\sqrt{2}\alpha-2\alpha)^2+2(2\sqrt{2}\alpha-2\alpha)\alpha-2\alpha^2)\\&=\pi(6\alpha^2-4\sqrt{2}\alpha^2)\end{aligned}$$

因此 $\beta=6\alpha^2-4\sqrt{2}\alpha^2$，即 $\dfrac{\beta}{\alpha^2}=6-4\sqrt{2}$。　答：$6-4\sqrt{2}$

8. 點 B、C 在直角坐標系的 x 軸(負向)上，點 A 在 y 軸(負向)上，以 AC 為直徑的圓與 AB 的延長線交於點 D，如下圖所示。已知 $AB=10$、$AO>BO$、弧長 CD = 弧長 AO，且 AO、BO 的長度分別為二次方程式 $x^2+kx+48=0$ 的兩個實根，則點 D 的座標為_____。

【參考解法】

可令 $AO=\alpha$、$BO=\beta$，則由畢氏定理知

$$\alpha^2+\beta^2=AB^2=100。$$

因 AO、BO 的長度分別為二次方程式 $x^2+kx+48=0$ 的兩個根，故知 $\alpha\beta=48$

所以可得

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=4$$

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=196$$

即 $\alpha-\beta=2$、$\alpha+\beta=14$。故可得知 $\alpha=8$，$\beta=6$。

連接 CD，因弧長 CD = 弧長 AO，故知 $CD=AO$；

由 AC 為圓的直徑知 $\angle CDA=90°=\angle COA$；

因 $\angle DCB$ 與 $\angle OAB$ 皆為 OD 弧的圓周角故知 $\angle DCB=\angle OAB$，

所以可得 $\triangle DBC\cong\triangle OBA$，因此 $DB=OB=6$。

再由 D 往 y 軸作垂線交於 E 點，則由 $\triangle DEA\sim\triangle BOA$ 知：

$$\frac{DE}{BO}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{DE}{6}=\frac{6+10}{10}=\frac{16}{10}\Rightarrow DE=\frac{48}{5}=9\frac{3}{5}=9.6$$

$$\frac{OE}{AO}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{OE}{8}=\frac{6}{10}\Rightarrow OE=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}=4.8$$

因 D 點位在第三象限，故知點 D 的座標為 $(-\frac{48}{5},\frac{24}{5})=(-9\frac{3}{5},4\frac{4}{5})=(-9.6,4.8)$。

答：$(-\frac{48}{5},\frac{24}{5})=(-9\frac{3}{5},4\frac{4}{5})=(-9.6,4.8)$

9. 設 a_1、a_2、a_3、…、a_k 為整數，且 $0\le a_k\le k$。若將正整數 2012 寫成一個關於階乘的多項式: $2012=a_1+a_2\times2!+a_3\times3!+\cdots+a_n\times n!$，則 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 之值為_____。(註：其中 $k!=k\times(k-1)\times\cdots\times3\times2\times1$ 稱為 k 階乘，例如 $4!=4\times3\times2\times1$)。

【參考解法】

此即為將正整數表示為 B 進位，取 $B_n=n+1$。B 進位法的記數法則：由右邊算起，第一位滿 B_1 進 1 到第二位，第二位滿 B_2，進 1 到第三位，……，第 n 位滿 B_n，進 1 到第 $n+1$ 位。

因 $2012=2\times1006+0$，故 $a_1=0$；

因 $1006=3\times335+1$，故 $a_2=1$；

因 $335=4\times83+3$，故 $a_3=3$；

因 $83=5\times16+3$，故 $a_4=3$；

因 $16=6\times2+4$，故 $a_5=4$；

因 $2=7\times0+2$，故 $a_6=2$；

所以 $2012=0+1\times2!+3\times3!+3\times4!+4\times5!+2\times6!$，

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=0+1+3+3=7$。

答：7

10. 設函數 $f(x)$ 滿足 $f(\frac{1}{1-x})=x\cdot f(x)+2$，則 $f(9)$ 之值為_____。

【參考解法】

可知 $f(x)=\frac{1}{x}(f(\frac{1}{1-x})-2)$，故 $f(9)=\frac{1}{9}(f(\frac{1}{1-9})-2)=\frac{1}{9}f(-\frac{1}{8})-\frac{2}{9}$，其中

$f(-\frac{1}{8})=(-8)(f(\frac{1}{1+\frac{1}{8}})-2)=(-8)\cdot f(\frac{8}{9})+16$、$f(\frac{8}{9})=\frac{9}{8}(f(\frac{1}{1-\frac{8}{9}})-2)=\frac{9}{8}f(9)-\frac{9}{4}$，

故

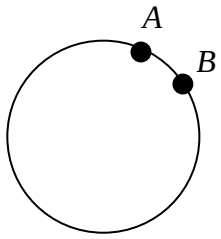
$$f(9)=\frac{1}{9}f(-\frac{1}{8})-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}((-8)\cdot f(\frac{8}{9})+16)-\frac{2}{9}=(-\frac{8}{9})\cdot f(\frac{8}{9})+\frac{14}{9}$$

$$=(-\frac{8}{9})\cdot(\frac{9}{8}f(9)-\frac{9}{4})+\frac{14}{9}=-f(9)+\frac{32}{9}$$

因此 $f(9)=\frac{16}{9}$。

答：$\frac{16}{9}$

11. 圓周上放有 n 枚棋子，其中 n 是 14 的倍數，B 點的棋子緊鄰 A 點的棋子，如圖所示。小傑首先拿走 B 點的棋子，然後依順時針方向每隔 1 枚拿走 2 枚棋子，這樣子操作連續轉了 10 圈，前 9 次都跨越過 A，而在第 10 次即將跨越過 A 並要拿走其他棋子時，小傑發現圓周上總共剩下 20 多枚棋子，則此時圓周上共剩_____枚棋子。



【參考解法】

令最後剩下 k 枚棋子，且由題意知 $20\le k<30$。

由操作規律可發現，在取走 B 後，都是每 3 枚棋子取走 2 枚，故可將原有的枚棋子加上一枚棋子置於 A、B 間，且取走 B 時視為一次取走增加的這一枚棋子與 B 這二枚棋子，則由 A 棋子在操作完一圈後被留下知此時剩下 $\frac{n+1}{3}$ 枚棋子在圓周上；由操作完第二圈後，A 棋子仍被留下知此時剩下 $\frac{n+1}{3^2}$ 枚棋子在圓周上；…；由操作完第十圈後，A 棋子仍被留下知此時剩下 $\frac{n+1}{3^{10}}$ 枚棋子在圓周上。故知 $\frac{n+1}{3^{10}}=k$，即 $n=k\times 3^{10}-1$。

因 n 是 14 的倍數，故知 n 為偶數且 $n\equiv 0\pmod 7$，所以 k 為奇數；

再因 $3^{10}\equiv 3^4\equiv 4\pmod 7$，故知 $n\equiv 4k-1\pmod 7$，即 $4k\equiv 1\pmod 7$，所以可得知 $k\equiv 2\pmod 7$。此時再由 $20\le k<30$ 可知 k=23。

答：23 枚

12. 設 ka_k $(k=1、2、\ldots.、n)$為 n 個相異的正整數，且滿足

$$3=a_1<2a_2<3a_3<\cdots<na_n=2419。$$

若此 n 個相異的正整數中任意 $n-1$ 個不同的數之算術平均數均為整數，則 n 的最大值為_____。

【參考解法】

不妨令 $S=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$、$S_i=\dfrac{S-ia_i}{n-1}$。則可知當 $1\le i<j\le n$ 時，

$$S_i-S_j=\frac{S-ia_i}{n-1}-\frac{S-ja_j}{n-1}=\frac{ja_j-ia_i}{n-1}$$

此即為 $ja_j-ia_i=(n-1)(S_i-S_j)\ge n-1$。而

$$\begin{aligned}na_n-a_1&=na_n-(n-1)a_{n-1}+(n-1)a_{n-1}-(n-2)a_{n-2}+(n-2)a_{n-2}-\cdots-2a_2+2a_2-a_1\\&=(na_n-(n-1)a_{n-1})+((n-1)a_{n-1}-(n-2)a_{n-2})+\cdots+(2a_2-a_1)\\&\ge\underbrace{(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)}_{n-1項}\\&=(n-1)^2\end{aligned}$$

故知 $(n-1)^2\le 2419-3=2416<2500=50^2$，即 $n<49$；

再由 $(n-1)(S_1-S_n)=na_n-a_1=2416$ 知 $n-1$ 為 $2416=2^4\times151$ 的因數，故 $n-1$ 的最大值為 $2^4=16$，所以 n 的最大值為 17。

此時可將這 17 數取為

3、16+3=19、16×2+3=35、16×3+3=51、16×4+3=67、16×5+3=83、16×6+3=99、16×7+3=115、16×8+3=131、16×9+3=147、16×10+3=163、16×11+3=179、16×12+3=195、16×13+3=211、16×14+3=227、16×15+3=243、16×151+3=2419。

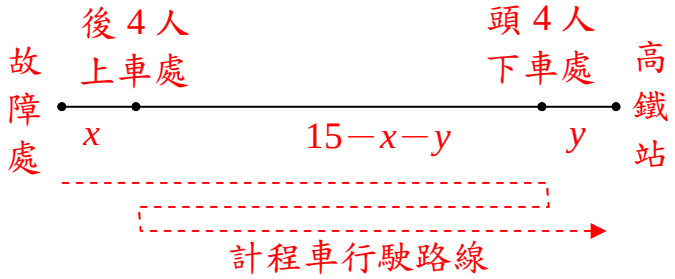
答：17

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

1. 若有 8 位同學搭乘速度相同的兩輛計程車同時從同一地點走相同路線前往高鐵站，每輛車除司機以外都限乘 4 人。但其中一輛計程車在距離車站 15 公里處故障無法行駛。若這時只有另一輛計程車可以來回運送，且這輛計程車行駛的勻速為 60 km/h，人步行的勻速為 5 km/h，請問最少還需要多少分鐘才能讓這 8 位同學全部都到達高鐵站？

【參考解法 1】

可讓正常的計程車繼續往高鐵站，抵達某處後讓車上四人步行前往車站，再回頭接送另外四個人。



如圖，假設後四人走了 x 公里後計程車才回到該地接送他們，且假設在距高鐵站 y 公里處計程車讓車上四人下車步行而回頭接後四人，則可知最快的方式為八人同時到達，即 $x=y$，再由同學所花費時間與計程車所花費時間的關係知：

$$\frac{x}{5}+\frac{15-x}{60}=\frac{15-2x+2\times(15-x)}{60}$$

$$12x=15-2x+15-x$$

$$15x=30$$

$$x=2$$

此情況所使用的時間為 $\frac{2}{5}+\frac{15-2}{60}=\frac{24+13}{60}=\frac{37}{60}$ 小時，即 37 分鐘。

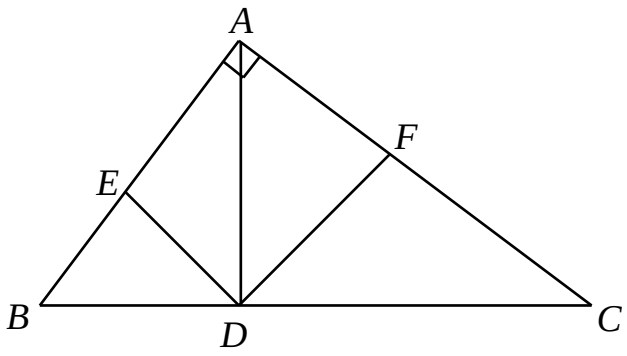
【參考解法 2】

可知所花費的最少時間為 8 個人同時抵達高鐵站，故可判斷出兩組人步行的時間相同、搭車的時間相同，即兩組人步行的距離相同、搭車的距離相同。現假設正常的計程車繼續往高鐵站行駛 x 小時後讓車上四人步行前往高鐵站，再回頭接送另外四個人。可知此時這輛計程車共行駛了 $60x$ 公里，因此回頭接到另四個人時，計程車與這四個人共移動了 $2\times60x=120x$ 公里。因計程車速度：人步行速度 $=60:5=12:1$，所以這四個人共行走了 $\frac{1}{12+1}\times120x=\frac{120}{13}x$ 公里，此時即可得 $60x+\frac{120}{13}x=15$，化簡得 $\frac{60}{13}x=1$，故 $x=\frac{13}{60}$，即正常的計程車繼續往高鐵站行駛 $\frac{13}{60}\times60=13$ 分鐘後讓車上四人步行前往高鐵站，四人所需步行的距離為 $15-60\times\frac{13}{60}=2$ 公里，步行時間為 $\frac{2}{5}\times60=24$ 分鐘，合計 $13+24=37$ 分鐘後抵達高鐵站。

答：37 分鐘

2. 線段 AD 為直角三角形 ABC 斜邊 BC 上的高，直線 DE 為 $\angle ADB$ 的角平分線，直線 DF 為 $\angle ADC$ 的角平分線，如圖所示。已知線段 AB、AC、BC 之長分別為 15、20、25。

試求：$\triangle BDE$ 的面積+$\triangle CDF$ 的面積－四邊形 $AEDF$ 的面積之值。



【參考解法】

可知 AB、AC、BC 長之比為 3：4：5。因 AD 為 BC 邊上的高，故可知

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$

因此 $AD=\frac{4}{5}\times AB=12$。且因 DE 為 $\angle ADB$ 的角平分線、DF 為 $\angle ADC$ 的角平分線，故由角平分線定理可推出 $\frac{AE}{AB}=\frac{4}{3+4}=\frac{4}{7}$、$\frac{AF}{AC}=\frac{3}{3+4}=\frac{3}{7}$，因此$\triangle ADE$ 的面積為$\triangle ADB$ 的面積的$\frac{4}{7}$、$\triangle BDE$ 的面積為$\triangle ADB$ 的面積的$\frac{3}{7}$、$\triangle ADF$ 的面積為$\triangle ADC$ 的面積的$\frac{3}{7}$、$\triangle FCD$ 的面積為$\triangle ADC$ 的面積的$\frac{4}{7}$。此時便可知：

$\triangle BDE$ 的面積+$\triangle CDF$ 的面積－四邊形 $AEDF$ 的面積

$=$ $\triangle ADB$ 的面積 $\times(\frac{3}{7}-\frac{4}{7})+$ $\triangle ADC$ 的面積 $\times(\frac{4}{7}-\frac{3}{7})$

$=\ 54\times(-\frac{1}{7})+96\times\frac{1}{7}$

$=6$

答：6

3. 已知方程組 $\begin{cases} y^2-x^2=1 \\ \dfrac{xy-x-y+1}{x^2-3x+2}=k \end{cases}$ 恰只有一組實數解，試求所有的 k 值。

【參考解法】

$$\begin{cases} y^2-x^2=1 \\ \dfrac{xy-x-y+1}{x^2-3x+2}=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-x^2=1 \quad \cdots\cdots(1) \\ \dfrac{(x-1)(y-1)}{(x-1)(x-2)}=k \quad \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

可知 k 值有意義時僅發生於 $x\neq 1$ 時，此時(2)式可改寫為

$$k=\frac{y-1}{x-2}$$

即 $y=kx-2k+1$，代入(1)式可得

$$(kx-2k+1)^2-x^2=1$$

$$k^2x^2+4k^2+1-4k^2x-4k+2kx-x^2=1$$

$$(k^2-1)x^2-(4k^2-2k)x+4k^2-4k=0$$

因此方程組僅有一解時為以下三種情況：

(i) x^2 項係數為 0，此時 $k^2=1$，即 $k=1$ 或 -1。

$k=1$ 時，$(x, y)=(0, -1)$；$k=-1$ 時，$(x, y)=(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$。

(ii) x^2 項係數不為 0，方程式 $(k^2-1)x^2-(4k^2-2k)x+4k^2-4k=0$ 有相同實根，即其判別式之值為 0，故得

$$(4k^2-2k)^2-4(k^2-1)(4k^2-4k)=0$$
$$16k^4-16k^3+4k^2-16k^4+16k^3+16k^2-16k=0$$
$$20k^2-16k=0$$
$$k(5k-4)=0$$

因此$k=0$或$\frac{4}{5}$。$k=0$時，$(x, y)=(0, 1)$；$k=\frac{4}{5}$時，$(x, y)=(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$。

(iii) x^2項係數不為0，方程式$(k^2-1)x^2-(4k^2-2k)x+4k^2-4k=0$有相異實根且其中一根為$x=1$(必須捨去)時，故將$x=1$代回可得：

$$k^2-2k-1=0$$
$$k^2-2k-1+2=0+2$$
$$(k-1)^2=2$$

因此$k=1+\sqrt{2}$或$1-\sqrt{2}$。

$k=1+\sqrt{2}$時，$(x, y)=(2\sqrt{2}, 3)$；$k=1-\sqrt{2}$時，$(x, y)=(-2\sqrt{2}, 3)$。

因此k之值有六種可能：1、−1、0、$\frac{4}{5}$、$1+\sqrt{2}$或$1-\sqrt{2}$。

答：1、−1、0、$\frac{4}{5}$、$1+\sqrt{2}$或$1-\sqrt{2}$