注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用 IMC 各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製本資料的任何部分，必須獲得 IMC 行政委員會的授權許可。

申請此項授權請電郵 IMC 行政委員會主席孫文先

ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the IMC Executive Board. Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2007 Changchun Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

2007 青少年數學國際城市邀請賽

個人賽試題　答題時間：120 分鐘　　2007/7/23 長春市

*隊名：*_____ *姓名：*_____ *得分：*_____

第一部份：填空題，請將答案填寫在空格內. 不須列出演算過程，共十二題，每題 5 分。

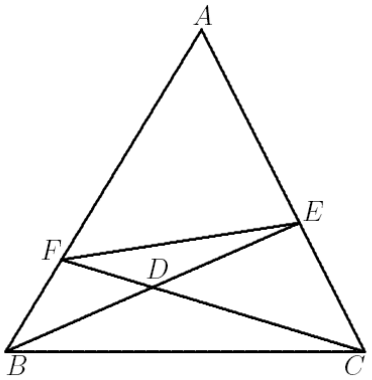
1．　用 A_n 表示 1，2，…，101 中，能被 n 整除的所有數的算術平均數。問：A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 中最大的是那一個？

答案：_____

2．在一個暴雨的黑夜，孤島上的四個人必須走過一座窄橋到陸地上去避難。過窄橋必須用燈照明，但是他們只有一盞燈，且橋上每次最多只能通過兩個人。若島上還有人，則過橋之人中必須有人把燈送回去。如果四個人單獨過橋，那麼所需的時間分別為 2 分鐘、4 分鐘、8 分鐘和 16 分鐘；如果兩人一起過橋，那麼所需時間依照較慢的人過橋的時間計算。問：這四個人過橋最少需要多少時間？

答案：_____

3．設 E、F 分別是 ΔABC 的邊 AC、AB 上的點，線段 BE、CF 交於點 D。已知 ΔBDF，ΔBCD，ΔCDE 的面積分別為 3，7，7。問：四邊形 $AEDF$ 的面積是多少？



答案：_____

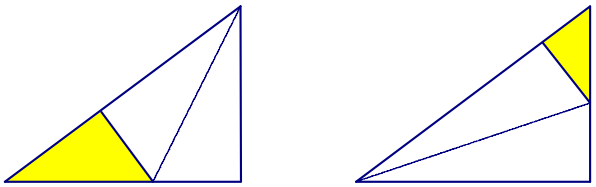
4．某個團體有 48 名會員，但是只有一半的人有制服。在某次檢閱儀式時，他們排成一個 6×8 的長方陣，恰好可把沒有制服的會員隱藏在長方陣的內部。後來又來了一批會員，但總數還是有一半的人沒有制服，在接下來的檢閱儀式，他們排成了一個不同的長方陣，又恰好可把無制服的會員隱藏在長方陣的內部。問：新來的會員有多少人？

答案：_____

5．已知連續 2008 個正整數的和是一個完全平方數，問：其中最大的數的最小值是多少？

答案：_____

6．如圖，A、B 兩個大小形狀相同的三角形紙片，其三邊的長之比為 3：4：5，按圖示方法將它對摺，使摺痕(圖中虛線)過其中的一個頂點，且使該頂點所在兩邊重合，記摺疊後不重合部分面積分別為 S_A, S_B，已知 $S_A+S_B=39$，求三角形紙片 A 的面積。



答案：_____

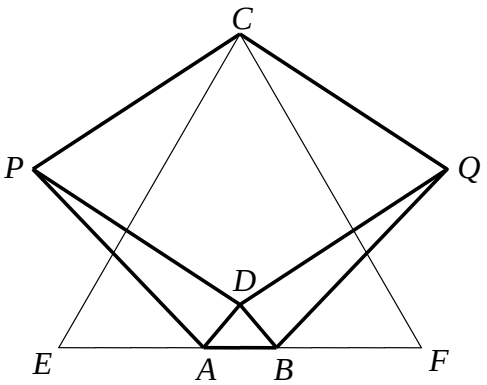
7．求最大的正整數 n，使得 $3^{1024}-1$ 能被 2^n 整除。

答案：_____

8．用長度分別為1，4，7，8的線段圍成一個四邊形，問：這個四邊形的最大面積是多少？

答案：_____

9．在下圖中，$CE=CF=EF$，$EA=BF=2AB$，且 $PA=QB=PC=QC=PD=QD=1$，求線段 BD 之長度。



答案：_____

10. 把 2，3，4，5，6，7，8 和 9 不重複地填入題中方框內，使下式成立。問：在相加的三個分數中，最大的一個是多少？

$$\frac{1}{\square\times\square}+\frac{\square}{\square\times\square}+\frac{\square}{\square\times\square}=1$$

答案：_____

11. 求滿足$25\{x\}+[x]=125$的所有實數 x 的和。（其中$[x]$表示不超過 x 的最大整數，$\{x\}=x-[x]$表示 x 的小數部分）

答案：_____

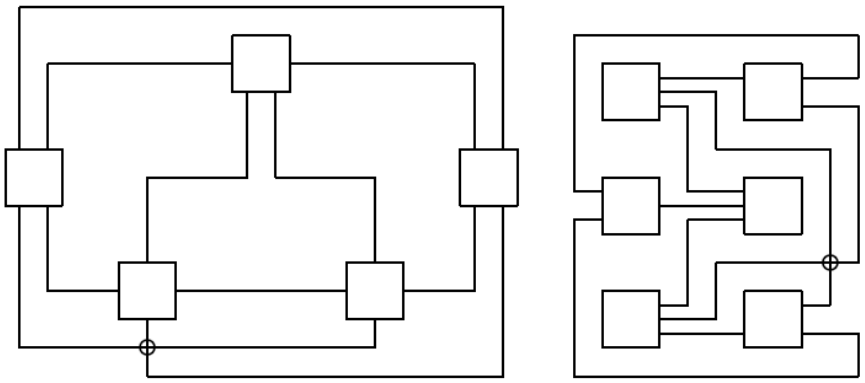
12. 設 n 為正整數，如果存在一個完全平方數，使得在十進制表示下此完全平方數的各數碼之和為 n，那麼稱 n 為好數(例如 13 是一個好數，因為 7^2=49 的數碼和等於 13)。在 1，2，…，2007 中有多少個好數？

答案：_____

第二部份：計算及證明題，必須寫下計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 在4×4的表格中，可作十八條直線，即四橫、四縱的八條直線，從左上到右下和從由右上到左下各五條對角線，這些對角線可能通過 2、3 或 4 個小方格。在表格中要放十個籌碼，每個小方格最多放一個。若這十八條直線中某條直線上有偶數個籌碼，則得一分。問：最多可以得多少分？

2. 已知五個城市兩兩相連所得的 10 條道路中，至少有一個交叉路口，如下左圖。又已知三個村莊和三個城市相連所得的 9 條道路中，至少有一個交叉路口，如下右圖。利用上述結論，問：用 15 條道路把六個城市兩兩相連，至少會產生多少個交叉路口？



3. 若一個質數的各位數碼經任意排列後仍然是質數，則稱它是一個“絕對質數”。例如：2, 3, 5, 7, 11, 13(31), 17(71), 37(73), 79(97), 113(131, 311), 199(919, 991), 337(373, 733),…都是絕對質數。求證：絕對質數的各位數碼不能同時出現數碼 1, 3, 7 與 9。