注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

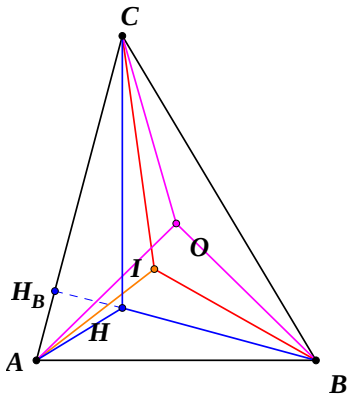
Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2004 秋季賽　國中組　高級卷　參考解答

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 若一個三角形的每個內角的度數都是有理數，則我們稱這個三角形爲「有理三角形」。若一個銳角「有理三角形」內部的一點與三角形的三個頂點連接後，可將原三角形分割爲三個「有理三角形」，則稱此點爲「優點」。試證每個銳角「有理三角形」內部至少有 3 個「優點」。(四分)



解：

設三角形 ABC 為已知銳角有理三角形，I、O、H 分別為三角形內心、外心與垂心。三角形 ABC 為銳角三角形，所以 I、O、H 均在三角形內部。

(1)內心 I 是「優點」。

連接 AI、BI、CI，將三角形 ABC 分割為 ABI、BCI、CAI 三個三角形。

在三角形 ABI 中，$\angle ABI=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\because \angle ABC$ 的度數是有理數　$\therefore \angle ABI$ 的度數也是有理數

同理，$\angle IAB=\frac{1}{2}\angle CAB$，為有理數；

$\angle BIA=180^\circ-\angle ABI-\angle IAB$，為有理數；所以三角形 ABI 為有理三角形。

同理可證三角形 BCI、CAI 也都是有理三角形，故得證內心 I 是「優點」。

(2)外心 O 是「優點」。

連接 AO、BO、CO，將三角形 ABC 分割為 ABO、BCO、CAO 三個三角形。

在三角形 ABO 中，$\angle BOA=2\angle BCA$，

$\because \angle BCA$ 的度數是有理數　$\therefore \angle BOA$ 的度數也是有理數

又 $AO=BO \Rightarrow \angle OAB=\angle ABO=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOA)$，為有理數

所以三角形 ABO 為有理三角形。

同理可證三角形 BCO、CAO 也都是有理三角形，故得證外心 O 是「優點」。

(3)垂心是 H「優點」。

連接 AH、BH、CH，將三角形 ABC 分割為 ABH、BCH、CAH 三個三角形。

延長 BH 交 CA 於 H_B，則 $\angle BH_BA=90^\circ$，

在三角形 ABH 中，$\angle ABH=180^\circ-\angle BH_BA-\angle CAB=90^\circ-\angle CAB$

$\because \angle CAB$ 的度數是有理數　$\therefore \angle ABH$ 的度數也是有理數

同理，$\angle HAB=90^\circ-\angle ABC$，為有理數；

$\angle BHA=180^\circ-\angle ABH-\angle HAB$，為有理數；

所以三角形 ABH 為有理三角形。

同理可證三角形 BCH、CAH 也都是有理三角形，故得證垂心 H 是「優點」。

綜合(1)、(2)、(3)，得證所以每個銳角「有理三角形」內部至少有 3 個「優點」：內心、外心、垂心。

特別地，如果已知銳角有理三角形 ABC 為等腰三角形，則在底邊對應的高上面取點，只要該點與底邊一個頂點的連線和底邊夾角度數為有理數，那麼這個點滿足要求。很明顯這樣的點有無窮多。

評分標準：

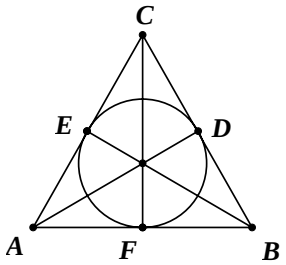
(1) 宣佈內心、外心、垂心→1/7。

(2) 證明內心、外心、垂心符合所求→每個心各 2/7。

(3) 討論等腰三角形、正三角形的情況→1/7。

2. 三角形 ABC 的內切圓分別切 BC、CA 及 AB 於點 D、點 E 及點 F。若 $AD=BE=CF$，則三角形 ABC 是否必定爲正三角形？(五分)

解 1：



假設 $AB\neq AC$，則三角形 ABE 與 ACF 不全等；

然而 $\angle BAE=\angle CAF$，$AE=AF$，$BE=CF$

- $\angle ABE+\angle ACF=180^\circ$

$\because \angle ABE\neq\angle ACF$ $\therefore \angle ABE$ 與 $\angle ACF$ 必有一個是鈍角，也就是說 $AE>AB$ 或 $AF>AC$；又 $AE=AF$

- $AF>AB$ 或 $AE>AC$，產生矛盾！

所以 $AB=AC$；同理可證 $AB=BC$，所以三角形 ABC 是正三角形。

評分標準：

(1) 知道 $AE=AF\rightarrow\frac{1}{7}$

(2) 知道三角形中 $S.S.A.$則必為全等或有對應角互補→$\frac{5}{7}$。

(3) 證明 AB 等於 $AC\rightarrow\frac{1}{7}$

解 2：

設 $AE=AF=x$；$BF=BD=y$；$CD=CE=z$，

$CF=BE$ • $x^2+(x+z)^2-2x(x+z)\cos A=x^2+(x+y)^2-2x(x+y)\cos A$

假如 $y\neq z$，則我們化簡得到 $2x\cos A=2x+y+z$，由於 y、$z>0$，等式不可能成立。於是 $y=z$。同理，$x=y$。三角形 ABC 是正三角形。

評分標準：

(1) 會用餘弦定理→$\frac{2}{7}$。

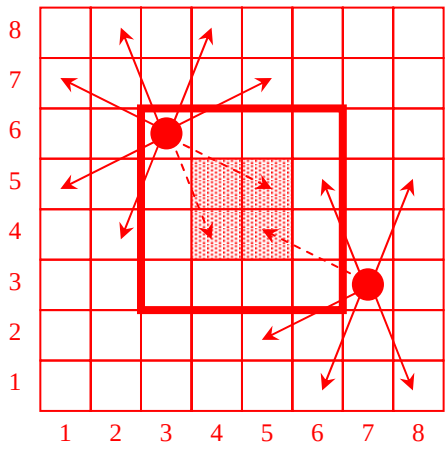
(2) 知道 $AE=AF$、$BF=BD$、$CD=CE\rightarrow\frac{1}{7}$。

(3) 知道$|\cos A|$• $1\rightarrow\frac{1}{7}$。

(4) 證出 $x=y=z\rightarrow\frac{3}{7}$。

3. 請問在 8×8 的棋盤的格子內，最多可以放置入多少個騎士，使得每個騎士最多可以攻擊 7 個其他的騎士？(註：每個格子內至多只能放入一個騎士，且騎士在棋盤上可攻擊的位置爲橫二縱一或橫一縱二的位置。) (六分)

解：



最多可放置入 60 個騎士。

將棋盤標上座標(i, j)，$1 \le i, j \le 8$。將除$(4, 4)$、$(4, 5)$、$(5, 4)$、$(5, 5)$格外放滿騎士，顯然這種方法符合要求。

現證明 60 是可能放入的最大個數。很容易發現$(i, j)(3 \le i, j \le 6)$位置上的騎士有 8 種可能走法，而其他位置上的騎士走法不超過 7 種。故只需考慮這 16 個格子的放置情形。

棋盤上每一格最多有 4 種走到這 16 格中的方法，考慮棋盤放滿騎士的情形，我們從中取走儘量少的騎士，使得中心 16 格或者不放置騎士，或者最多可以攻擊 7 個騎士。在中心 16 格外取走一個騎士，最多可使得 16 格中的 4 個其他騎士最多攻擊到 7 個騎士；若從中心 16 格內取走某個騎士，則最多可使得 16 格中的 5 格滿足題目要求，因為除影響到的至多 4 個騎士外，此格本身也不放置騎士了。若只取走 3 個騎士，則最多僅可使得 15(3×5)格滿足題目要求，因此至少要取走 4 個騎士，亦即最多只可放置 60 個騎士。

評分標準：

(1) 宣布最多可放置入 60 個騎士→$\frac{1}{7}$。

(2) 繪圖標示出 60 個騎士放置的位置→$\frac{1}{7}$。

(3) 說明 60 個騎士滿足條件→$\frac{2}{7}$。

(4) 說明至少要取走 4 個，即最多 60 個→$\frac{3}{7}$。

4. 小丁心裡想著兩個正數 x、y，並在黑板上依隨意的順序寫下 $x+y$、$x-y$、$x \times y$ 及 $x \div y$ 四個數，然後請小方來猜他心裡想的那兩個數。試證只看到黑板上所寫的四個數，小方一定有足夠的訊息可以唯一地算出 x、y 之值。(六分)

解：

令 $S=\{x+y, x-y, x \times y, x \div y\}$

首先，由於 x、y 爲正數，故在 $x+y$、$x-y$、$x \times y$、$x \div y$ 中只有 $x-y$ 可能不是正數。以下分三種情況討論：

(1) S 含 0，則 $x=y$、$x \div y=1$。

考慮 S 中非零數的積，由$(x \times y)(x+y)=2x^3$可得到 x、y。

(2) S 含負數，這時有 $x<y$、$x \div y<1$。記 $T=\{x+y, x \times y, x \div y\}$

令 N 爲 T 中小於 1 的數的個數

(2.1) $N=1$，則 T 中最小的數爲 $x\div y$。由 $x-y$、$x\div y$ 可確定 x、y。

(2.2) $N=2$，這時 $x+y$ 不能小於 1（若 $x+y<1\Rightarrow x<y<1\Rightarrow x\times y<1\Rightarrow$ N＝3），則 T 中最大的數爲 $x+y$。由 $x-y$、$x+y$ 可確定 x、y。

(2.3) $N=3$，這時 $x+y<1$，有 $x<y<1$，於是 $x\times y<x+y$、$x\times y<x\div y$，$x\times y$ 爲 T 中最小的數。由 $x-y$、$x\times y$ 可確定 x、y。

(3) S 中均爲正數。

我們證明可將 S 中四個數分爲兩組 A、B，每組兩個數，使得 A 中兩數之和的平方爲 B 中兩數之積的 4 倍，且 A 中的數之數值唯一確定。

由於可取 A＝$\{x+y, x-y\}$，B＝$\{x\times y, x\div y\}$，從而若上面斷言成立，則 A 中兩數的值必爲 $x+y$、$x-y$，這樣便可確定 x、y。

現在證明這一點：令 S＝$\{a, b, c, d\}$，假設有分法 A、B 和 A'、B'；A 和 A'不同，則有兩種可能：

(3.1) A 和 A'沒有相同的數，

令 A＝$\{a, b\}$、A'＝$\{c, d\}$；則 B＝$\{c, d\}$，B'＝$\{a, b\}$

這時有 $(a+b)^2=4cd$、$(c+d)^2=4ab\Rightarrow(a-b)^2+(c-d)^2=0\Rightarrow a=b$、$c=d$；

進而由$(a+b)^2=4cd$，得到 $a=b=c=d$ 或 $a=b=-c=-d$

前者要求 $x+y=x-y$，後者說明有兩個負數，均不可能！

(3.2) A 和 A'恰有一個相同的數，

不妨設 A＝$\{a, b\}$、A'＝$\{a, c\}$，且 b 不等於 c。

於是 $(a+b)^2=4cd$、$(a+c)^2=4bd$；將此二等式的兩端分成乘以 b、c，再將兩式相減得 $b(a+b)^2-c(a+c)^2=0$，

即$(b-c)[a^2+2a(b+c)+b^2+bc+c^2]=0$

但是 $b-c$ 非零，且由 a、b、c 爲正數有 $a^2+2a(b+c)+b^2+bc+c^2>0$。矛盾！

以上分析說明可唯一確定 x、y。

評分標準：

(1) 知道有 0 或負數時，此數必為 $x-y\rightarrow\frac{1}{7}$。

(2) 用小於 1 分類討論$\rightarrow\frac{1}{7}$。

(3) 證明有 1 個負數時，可以唯一地算出 x、y 之值$\rightarrow\frac{4}{7}$。

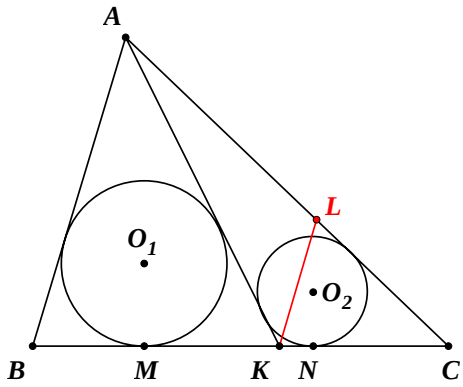
(4) 知道找兩數之和的平方爲另兩數之積的 4 倍$\rightarrow\frac{1}{7}$。

(5) 證明全為正數時，可以唯一地算出 x、y 之值$\rightarrow\frac{2}{7}$。

(6) 討論兩數之和的平方爲另兩數之積的 4 倍的分法唯一$\rightarrow\frac{1}{7}$。

5. 在三角形 ABC 的 BC 邊上任取一點 K，使得三角形 BAK 的內切圓切 BC 邊於點 M，三角形 CAK 的內切圓切 BC 邊於點 N，試證 $BM\cdot CN>KM\cdot KN$。(七分)

解 1：



根據已知條件，我們有

$BM=\frac{AB+BK-AK}{2}$，$CN=\frac{AC+CK-AK}{2}$，

$KM=\frac{AK+BK-AB}{2}$，$KN=\frac{AK+CK-AC}{2}$。從而 $BM\cdot CN>KM\cdot KN$ 就等價於

$AC\cdot KB+AB\cdot KC>AK(KB+KC)=AK\cdot BC$

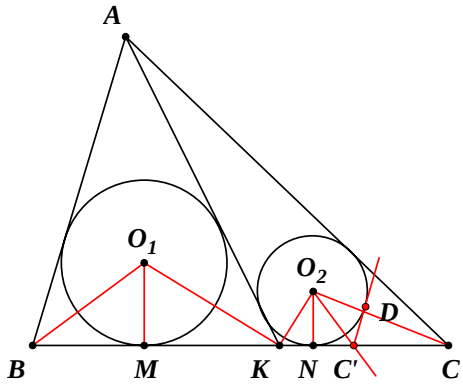
或 $\frac{AC\cdot BK}{BC}+\frac{AB\cdot CK}{BC}>AK$。

過 K 做 AB 的平行線交 AC 於 L

- $\triangle ABC$● $\triangle LKC$● $AL=\frac{AC\cdot BK}{BC}$，$KL=\frac{AB\cdot CK}{BC}$
- $\frac{AC\cdot BK}{BC}+\frac{AB\cdot CK}{BC}=AL+KL>AK$● $BM\cdot CN>KM\cdot KN$。

評分標準：

解 2：



設三角形 BKA 的內切圓圓心爲 O_1，三角形 CAK 的內切圓圓心爲 O_2。連接線段 O_1B、O_1M、O_1K、O_2K、O_2N、O_2C。

過 O_2 作射線 O_2C'，

使得 $\angle NO_2C'=\angle MO_1B=\frac{1}{2}\angle ABC<90^\circ$，

且 C' 在射線 NC 上，

則我們有 $\angle NC'O_2=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC$。

過 C' 作圓 O_2 異於 $C'N$ 的另一條切線 $C'D$，切圓 O_2 於 D，

則 $\angle NC'O_2=\angle DC'O_2\Rightarrow\angle NC'D=180^\circ-\angle ABC\Rightarrow C'D$ 與 AB 平行。

若 C' 與 N 在 C 異側，則由 $C'D$ 與 AB 平行，知 C'D 與 $\triangle ABC$ 形內無交點，這與 D 在 $\triangle ABC$ 內相矛盾，故 C' 與 N 在 C 同側 $\Rightarrow CN>C'N$。

由內切圓圓心與三角形頂點連線平分該角及內切圓圓心與切點連線垂直於所切邊知：

$$\begin{cases}\angle NO_2C'=\angle MBO_1\\ \angle O_2NC'=\angle BMO_1=90^\circ\end{cases}\Rightarrow\Delta NO_2C'\approx\Delta MBO_1\Rightarrow\frac{O_2N}{BM}=\frac{C'N}{O_1M}\Rightarrow BM\cdot C'N=O_1M\cdot O_2N$$

$$\begin{cases}\angle NO_2K=90^\circ-\angle NKO_2=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AKN)=\frac{1}{2}\angle AKM=\angle MKO_1\\ \angle O_2NK=\angle KMO_1=90^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta NO_2K\approx\Delta MKO_1\Rightarrow\frac{O_2N}{KM}=\frac{KN}{O_1M}\Rightarrow KM\cdot KN=O_1M\cdot O_2N$$

$\Rightarrow BM\cdot C'N=KM\cdot KN$，而 $CN>C'N\Rightarrow BM\cdot CN>KM\cdot KN$。

評分標準：

(1) 證明 $KM \cdot KN = O_1M \cdot O_2N \to \frac{3}{7}$。

(2) 證明 $BM \cdot C'N = O_1M \cdot O_2N \to \frac{3}{7}$。

(3) 證明 $BM \cdot CN > O_1M \cdot O_2N \to \frac{4}{7}$。

解 3：

設三角形 BKA 的內切圓半徑爲 r_1，三角形 CAK 的內切圓半徑爲 r_2，則由內切圓圓心與三角形頂點連線平分該角及內切圓圓心與切點連線垂直于所切邊知：$BM \cdot CN = \frac{r_1 r_2}{\tan\frac{\angle ABC}{2}\tan\frac{\angle ACB}{2}}$，$KM \cdot KN = \frac{r_1 r_2}{\tan\frac{\angle AKB}{2}\tan\frac{\angle AKC}{2}}$。

再來只需證明：$\tan\frac{\angle ABC}{2}\tan\frac{\angle ACB}{2} < \tan\frac{\angle AKB}{2}\tan\frac{\angle AKC}{2}$。

$\angle AKB + \angle AKC = 180^\circ$

$\Rightarrow \tan\frac{\angle AKB}{2}\tan\frac{\angle AKC}{2} = \tan\frac{\angle AKB}{2}\cot(90^\circ - \frac{\angle AKC}{2}) = \tan\frac{\angle AKB}{2}\cot\frac{\angle AKB}{2} = 1$

又 $\angle ABC + \angle ACB < 180^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2} > \frac{\angle ABC}{2} \Rightarrow \cot(90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}) < \cot\frac{\angle ABC}{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{\angle ABC}{2}\tan\frac{\angle ACB}{2} = \tan\frac{\angle ABC}{2}\cot(90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}) < \tan\frac{\angle ABC}{2}\cot\frac{\angle ABC}{2} = 1$

$\Rightarrow \tan\frac{\angle ABC}{2}\tan\frac{\angle ACB}{2} < \tan\frac{\angle AKB}{2}\tan\frac{\angle AKC}{2} \Rightarrow BM \cdot CN > KM \cdot KN$。

評分標準：

(1) 會列式 $\to \frac{1}{7}$。

(2) 會用積化和差 $\to \frac{1}{7}$。

(3) 會轉化為比較分母、分子大小 $\to \frac{1}{7}$。

(4) 證明 $\tan\frac{\angle AKB}{2}\tan\frac{\angle AKC}{2} < 1 \to \frac{5}{7}$。

6. 甲、乙二人依下述方法分一塊乳酪：甲先將現有的乳酪切成二塊；然後輪由乙從這二塊乳酪中挑選一塊切成二塊；接著由甲從這三塊乳酪中挑選一塊切成二塊；最後由乙從這四塊乳酪中挑選一塊切成二塊，此時乳酪已被切爲五塊，甲、乙二人停止切乳酪。由甲先開始二人輪流，每次從中挑選一塊乳酪，所以甲共可挑三塊，每個人都想盡量得到多一點的乳酪。無論對手如何切，請問甲、乙二人分別有什麼最佳策略？分別保證可得到多少乳酪？(八分)

解：

(1) 甲至少可得到 $\frac{3}{5}$ 塊乳酪，策略如下：甲先將乳酪分成 $\frac{3}{5}$、$\frac{2}{5}$ 二塊；

(1.1) 若乙將 $\frac{2}{5}$ 塊乳酪分成 $\frac{1}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$ 二塊，其中 $0 \le \varepsilon \le \frac{1}{5}$，則甲將 $\frac{3}{5}$ 塊乳酪

分成$\frac{2}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$二塊。此時，四塊乳酪的大小分別為$\frac{2}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$，乙若分割其中一塊$\frac{1}{5}-\varepsilon$，則他最多可得到$(\frac{1}{5}+\varepsilon)+(\frac{1}{5}-\varepsilon)=\frac{2}{5}$塊；乙若分割其中不是$\frac{1}{5}-\varepsilon$的一塊，則他必取到一塊$\frac{1}{5}-\varepsilon$，而另一塊必不大於$\frac{1}{5}+\varepsilon$，總和亦不超過$\frac{2}{5}$塊。

(1.2) 若乙將$\frac{3}{5}$塊乳酪分成$\frac{2}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$二塊，其中$0\le\varepsilon\le\frac{1}{5}$，則甲將$\frac{2}{5}$塊乳酪分成$\frac{1}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$二塊，此時情況與(1.1)同。

(1.3) 若乙將$\frac{3}{5}$塊乳酪分成$\frac{2}{5}-\varepsilon$、$\frac{1}{5}+\varepsilon$二塊，其中$0\le\varepsilon\le\frac{1}{10}$，則甲將$\frac{2}{5}-\varepsilon$塊乳酪分成$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$二塊。此時，四塊乳酪的大小分別為$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$；

(1.3.1) 乙若將$\frac{2}{5}$塊分割為$\frac{1}{5}+\varepsilon'$、$\frac{1}{5}-\varepsilon'$，則他最多可得到$\frac{2}{5}$塊。

(1.3.2) 乙若將$\frac{1}{5}+\varepsilon$塊分割，如果分成的其中一塊比$\frac{1}{5}$大，則甲至少可得到$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$塊；如果分成的二塊都不比$\frac{1}{5}$大，則乙得到的兩塊都不大於$\frac{1}{5}$，即總和不超過$\frac{2}{5}$塊。

(1.3.3) 乙若將$\frac{1}{5}$塊分割，由於$\frac{1}{5}-\varepsilon\ge\frac{1}{10}$，故從$\frac{1}{5}$塊分割出來的二塊中有一塊不大於$\frac{1}{10}$，則乙最多得到$\frac{2}{5}$塊。

(1.3.4) 乙若將$\frac{1}{5}-\varepsilon$塊分割，顯然他最多可得到$\frac{2}{5}$塊。

(2)乙至少可得到$\frac{2}{5}$塊乳酪，策略如下：

(2.1) 若甲先將乳酪分成$\frac{3}{5}-\varepsilon$、$\frac{2}{5}+\varepsilon$二塊，其中$0\le\varepsilon\le\frac{1}{10}$；乙則將$\frac{3}{5}-\varepsilon$塊乳酪分成$\frac{2}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}-2\varepsilon$二塊。此時，三塊乳酪的大小分別為$\frac{2}{5}+\varepsilon$、$\frac{2}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}-2\varepsilon$；

(2.1.1) 若甲將$\frac{1}{5}-2\varepsilon$塊分割，則乙至少可得到$\frac{2}{5}+\varepsilon$塊。

(2.1.2) 若甲將$\frac{2}{5}+\varepsilon$塊分割，乙就將另一$\frac{2}{5}+\varepsilon$塊做同樣的分割，乙仍至少可得到$\frac{2}{5}+\varepsilon$塊。

(2.2) 若甲先將乳酪分成$\frac{3}{5}+\varepsilon$、$\frac{2}{5}-\varepsilon$二塊，其中$0\le\varepsilon\le\frac{1}{5}$；乙則將$\frac{2}{5}-\varepsilon$塊乳酪

分成$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$二塊。此時，三塊乳酪的大小分別為$\frac{3}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$；

(2.2.1) 若甲將$\frac{1}{5}$或$\frac{1}{5}-\varepsilon$塊分割，乙就將$\frac{3}{5}+\varepsilon$塊平分成二塊$\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\varepsilon)$，如此，乙至少可得$\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\varepsilon)+\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\varepsilon)=\frac{2}{5}$塊。

(2.2.2) 若甲將$\frac{3}{5}+\varepsilon$塊分割，則至少有一塊不小於$\frac{1}{5}+\varepsilon$；乙就分割這塊，使其中一塊為$\frac{1}{5}+\varepsilon$，最後，分割出的五塊為$\frac{1}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}+\varepsilon'$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$、$\frac{1}{5}-\varepsilon'$，乙至少可得到$\frac{2}{5}$塊。

(2.3) 若甲先將乳酪分成$\frac{4}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$二塊，其中$0\le\varepsilon\le\frac{1}{5}$；乙則將$\frac{4}{5}+\varepsilon$塊乳酪分成$\frac{3}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}$二塊。此時，三塊乳酪的大小分別為$\frac{3}{5}+\varepsilon$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{5}-\varepsilon$，與(2.2)同。

綜合上述，甲至少可得到$\frac{3}{5}$塊乳酪，乙至少可得到$\frac{2}{5}$塊乳酪。

評分標準：

(1) 宣布甲至少可得到$\frac{3}{5}$塊乳酪，乙至少可得到$\frac{2}{5}$塊乳酪→$\frac{1}{7}$。

(2) 說明理由，但不完整→$\frac{1}{7}$。

(3) 完整證明甲至少可得到$\frac{3}{5}$塊乳酪→$\frac{4}{7}$。

(4) 完整證明乙至少可得到$\frac{2}{5}$塊乳酪→$\frac{3}{7}$。

7. 有 A、B 兩種矩形紙板各許多片。假設可以用數片 A 種矩形拼出一個與 B 種矩形相似的矩形，試證也可以用數片 B 種矩形拼出一個與 A 種矩形相似的矩形。注意：拼這些矩形時，紙板不允許重疊也不允許中間有空隙。(八分)

解：

設 A 種矩形的長、寬分別為 a_1、a_2，B 種矩形的長、寬分別為 b_1、b_2，則 A 種矩形拼出的矩形之長、寬可以分別寫成 $u_1a_1+u_2a_2$、$v_1a_1+v_2a_2$，其中 u_1、u_2、v_1、v_2 均為非負整數；又與 B 種矩形相似，所以有 $\frac{u_1a_1+u_2a_2}{v_1a_1+v_2a_2}=\frac{b_1}{b_2}\cdots(*)$。

(1) 若 $\frac{a_1}{a_2}$ 為無理數，我們證明：A 種矩形只能「平凡地」拼出大矩形；所謂「平凡」是指全部的矩形之間以長重合或寬重合的方式相接。

對所用的 A 種矩形個數 n 用歸納法：

當 $n=1$ 時，顯然成立。設 $2\le n\le k-1$ 時，均成立。

當 $n=k$ 時，考慮大矩形最上方的第一列，

(1.1)均為邊重合方式拼排的 A 種矩形；此時，大矩形最上方的第一列就是一列 A 種矩形，以長重合的方式相接，如圖 1。由歸納假設可知，大矩形其餘部分的拼排方式是「平凡的」，且方向與第一列相同。不然，將與 $\frac{a_1}{a_2}$ 為無理數矛盾！

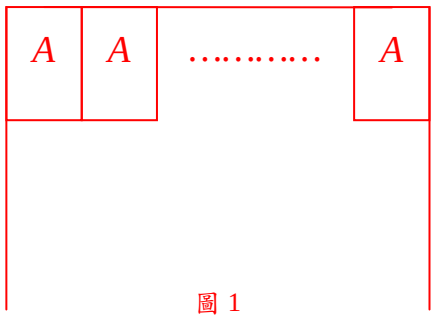


圖 1

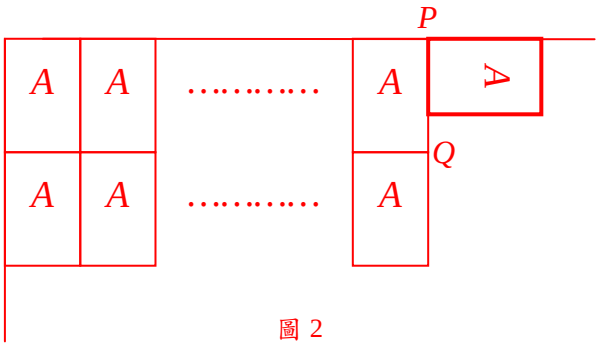


圖 2

(1.2)從左邊開始看，直到出現一個不是以邊重合方式拼排的 A 種矩形（如圖 2 中粗線矩形）。考慮「縫隙」PQ，該「縫隙」不會在 Q 處結束，否則，將與 $\frac{a_1}{a_2}$ 為無理數矛盾！於是第二列的拼排方式應與第一列相同，直到「縫隙」PQ 處。同樣的，可得大矩形在直線 PQ 左邊的部分是「平凡地」拼排；由歸納假設可知，在直線 PQ 右邊的部分也是如此，且方向相同。

於是我們證明了，A 種矩形只能「平凡地」拼出大矩形，如此，相當於 $u_1=v_2=0$ 或 $u_2=v_1=0$。不妨設 $u_2=v_1=0$，則由(＊)得 $\frac{u_1a_1}{v_2a_2}=\frac{b_1}{b_2}\Rightarrow\frac{v_2b_1}{u_1b_2}=\frac{a_1}{a_2}$；將 B 種矩形如圖 3 拼排，即可得相似於 A 種矩形的大矩形。

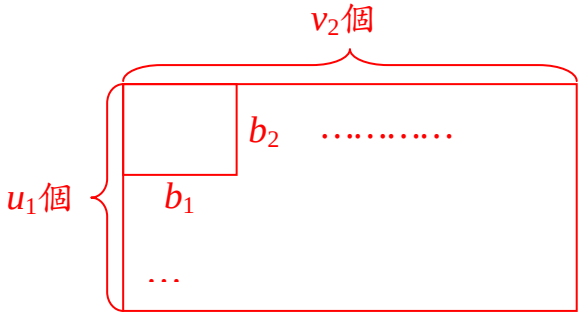


圖 3

(2) 若 $\frac{a_1}{a_2}$ 為有理數，不失一般性，我們可以假設 a_1、a_2、b_1、b_2 均為正整數，由(＊)得 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{v_2b_1-u_2b_2}{u_1b_2-v_1b_1}=\frac{v_2b_1{}^2b_2-u_2b_1b_2{}^2}{u_1b_1b_2{}^2-v_1b_1{}^2b_2}=\frac{\left(v_2b_1b_2-u_2b_2{}^2\right)b_1}{\left(u_1b_1b_2-v_1b_1{}^2\right)b_2}$；將 B 種矩形類似圖 3 拼排，將 v_2 換為 $v_2b_1b_2-u_2b_2{}^2$、u_1 換為 $u_1b_1b_2-v_1b_2{}^2$，即可得相似於 A 種矩形的大矩形。

評分標準：

(1)證明長、寬均為整數的情況→ $\frac{1}{7}$。

(2)證明長、寬均為有理數的情況→$\frac{3}{7}$。

(3)討論$\frac{a_1}{a_2}$為無理數的情況，其排列方式為「平凡的」→$\frac{4}{7}$。