注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2004 秋季賽　國中組　初級卷　參考解答

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 是否能將正整數 1、2、3、…、2003、2004 重新排列，使得任意連續十項的和都可以被 10 整除？(三分)

解：

判斷一個正整數是否可以被 10 整除，只要看個位數是否為 0，所以，我們只需要考慮個位數，重新排列個位數即可。

1～2004 中，個位數字為 5、6、7、8、9、0 的各有 200 個，個位數字為 1、2、3、4 的則各有 201 個。

假設能將正整數 1、2、3、…、2003、2004 重新排列，使得任意連續十項的和都可以被 10 整除，那麼在這個排列中，第 1 項與第 11 項的個位數應該要相同，第 2 項與第 12 項的個位數也應該要相同……依此類推，個位數字應該是一個週期為 10 項的數列，且一個週期中的 10 項，其個位數均不相同；否則，假設有某 2 項是的個位數是相同，從而在整個 2004 項的數列中，至少有 400 項的個位數都是這個數字；這與 1～2004 中，個位數相同的最多只有 201 項矛盾。

然而，0＋1＋2＋…＋9＝45，45 不能被 10 整除，產生矛盾，所以不可能將正整數 1、2、3、…、2003、2004 重新排列，使得任意連續十項的和都可以被 10 整除。

評分標準：

(1)說明個位數字為 5、6、7、8、9、0 的各有 200 個，個位數字為 1、2、3、4 的則各有 201 個→1/7。

(2)說明個位數字應該是一個週期為 10 項的數列→2/7。

(3)說明在一個週期中的 10 項個位數均不同→3/7。

(4)指出 0＋1＋2＋…＋9＝45，45 不能被 10 整除→1/7。

2. 一個盒子內有紅、綠、藍、白四種顏色的珠子共 111 顆。已知我們隨意從盒內取出 100 顆珠子，可以保證取出的珠子中四種不同顏色的珠子都會出現。請問我們至少要從盒內隨意取出多少顆珠子，在滿足上述條件下，無論各種顏色的珠子如何分配，也一定可以保證取出的珠子中至少有三種不同顏色？(四分)

解：

(1)首先，我們要指出只取出 87 顆的珠子是不夠的。

我們可以在盒子中放 75 顆紅色珠子與綠色、藍色、白色珠子各 12 顆，那麼，任何三種顏色的珠子數量最多是 99 顆，因此，我們隨意從盒內取

出 100 顆珠子，取出的珠子中一定四種不同顏色的珠子都會出現，滿足題目條件。

在這樣的情況下，我們隨意從盒內取出 87 顆珠子，結果有可能是 75 顆色紅珠子與 12 顆綠色珠子，只有二種顏色。

(2)再證明取出 88 顆的珠子，就可以保證：無論各種顏色的珠子如何分配，取出的珠子中至少有三種不同顏色。

不失一般性，我們可以假設紅色珠子的數量≧綠色珠子的數量≧藍色珠子的數量≧白色珠子的數量。

白色珠子至少有 12 顆；否則，隨意取出 100 顆珠子就有可能沒有白色珠子。同理，藍色珠子也是至少有 12 顆，則白色珠子與藍色珠子至少有 24 顆，也就是說另外兩個顏色（紅色和綠色）的珠子數量最多是 111－24＝87 顆，所以只要取出 88 顆珠子，就可以保證取出的珠子中至少有三種不同顏色。

評分標準：

(1)指出任意顏色的珠子至少有 12 顆→1/7。

(2)說明若有某色的珠子少於 12 顆，則無法滿足題目條件→1/7。

(3)說明取出 88 顆的珠子是足夠的→2/7。

(4)說明取出 87 顆的珠子是不夠的→3/7。

3. 有若干個城市，其中的某些城市之間有巴士行駛（每條路線的巴士都是雙向對開，在中途沒有任何停靠站）。我們可以搭乘巴士從任何一個城市到任何其它城市（有可能中途經過其它的一些城市轉乘）。小強購買所有巴士營運路線的單程票各 1 張（一張 P、Q 城市之間的單程車票可以用來由城市 P 搭乘巴士至城市 Q 一趟，或由城市 Q 搭乘巴士至城市 P 一趟，但不得雙程使用）；小皮則購買所有巴士營運路線的單程票各 n 張。小強與小皮都由城市 A 出發，小強用盡所有的車票後，沒有再購買任何新的車票，結果他最終抵達城市 B；小皮搭了一陣巴士後，用了部份的車票，如果他不再購買任何新的車票，他已無法離開城市 X（因爲他已沒有由城市 X 到任何其它城市的車票）。試證：城市 X 必爲城市 A 或城市 B 二者之一。(四分)

解：

先考慮城市 A 與城市 B 之外的任何一個城市，假設是城市 C。若小強到城市 C 的次數為 k 次，那麼，他進入城市 C 時用了 k 張車票，離開城市 C 也用了 k 張車票，也就是說小強有 $2k$ 張票與城市 C 有關；而小皮購買所有巴士營運路線的單程票各 n 張，所以小皮有 $2kn$ 張票與城市 C 有關，於是，小皮可以進出 kn 次城市 C，不會被卡在城市 C，無法離開。所以，城市 X 必為城市 A 或城市 B 二者之一。

評分標準：

(1)有一筆畫的概念→1/7。

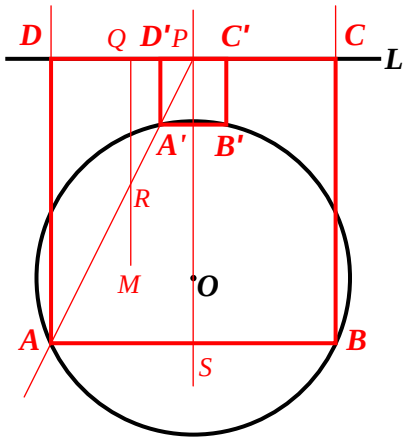
(2)指出城市 A、城市 B 為奇點→2/7。

(3)指出除城市 A、城市 B 之外的各城市都是偶點→2/7。

(4)指出除城市 A、城市 B 之外的各城市之票有 k 張進、k 張出，不可能被卡住→2/7。

4. 平面上任意給定一個圓及一條與此圓不相交的直線。請使用沒有刻度的直尺與圓規作一個正方形，使得此正方形相鄰的二個頂點在此給定圓的圓周上，另二個頂點則在所給定的直線上（假設這樣的正方形確定存在）。(五分)

解：



假設給定圓的圓心為 O，給定直線為 L。

作法如右圖所示：

(1)過圓心 O 做直線 L 的垂線，交 L 於 P。

(2)在 L 上取異於 P 點的點 Q，過點 Q 做直線 L 的垂線 M。

(3)在直線 M 上，且與圓心 O 在 L 的同側取一點 R，使得線段 $QR=2PQ$。

(4)做射線 PR 交圓 O 於 A、A'。

(5)過 A（或 A'）做直線 L 的垂線交 L 於 D（或 D'）。

(6)過 A（或 A'）做直線 OP 的垂線交 OP 於 S、交圓 O 於 B（或 B'）。

(7)過 B（或 B'）做直線 L 的垂線交 L 於 C（或 C'）。

(8)正方形 $ABCD$（與 $A'B'C'D'$）即為所求。

證明：

AB 與 DC 都垂直於 OP，所以 AB 與 DC 平行

QR、DA 與 CB 都垂直於 L，所以 QR、DA 與 CB 平行

$\Rightarrow ASPD$、$ABCD$ 為矩形，且 $\frac{DA}{DP}=\frac{QR}{QP}=\frac{2QP}{QP}=2$，即 $DA=2DP$。

AB 為圓 O 的弦，$OS\perp AB\Rightarrow AS=SB$

$DA=2DP=2AS=AS+SB=AB$，得證 $ABCD$ 為正方形。

同理可證，$A'B'C'D'$ 為正方形，即此種情況有二解。

若射線 PR 與圓 O 切於點 A，同樣的作圖方法可得所求之正方形；此時恰有一解。

若射線 PR 與圓 O 沒有交點，則此正方形不存在；但題目已說明不考慮這種情況。

評分標準：

(1)做出圖形→4/7。

(2)證明所做圖形正確→2/7。

(3)討論一解或二解→1/7。

5. 將 2004 分拆爲一個或一個以上的正整數之和，且這些正整數「差不多相等」。所謂一些正整數「差不多相等」是指它們之中的任意兩個數的差等於 1 或 0。請問滿足上述條件的分拆方法共有多少種？（注意：如果分拆後的正整數都相同，但只有次序不同，視其爲同一種分拆方法。）(五分)

解：

對於任意整數 k，$1 \leqq k \leqq 2004$，利用算術基本定理，我們可以找到唯一的數對(q, r)，使得 $2004 = kq + r$，$0 \leqq r \leqq k-1$。

$\underbrace{(q+1)+(q+1)+\ldots+(q+1)}_{r\text{個}}+\underbrace{q+q+\ldots+q}_{k-r\text{個}}=r(q+1)+(k-r)\,q=kq+r=2004$，即2004 可以分拆為 r 個$(q+1)$與$(k-r)$個 q，且$(q+1)$與 q 是「差不多相等」的正整數。

所以，對於每一個 k，我們都可以得到一個滿足題目條件的唯一分拆方法，而 k 可以取 1、2、…、2004，所以共有 2004 種分拆方法。

評分標準：

(1)給出 5 個以上的正確分拆例子→1/7。

(2)會用 $\left[\frac{2004}{k}\right]$ 之值→2/7。

(3)會分為 r 個$(q+1)$與$(k-r)$個 q→5/7。

(4)說明對於每一個 k，分拆方法是唯一的→2/7。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》