注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2004 秋季賽　高中組　高級卷　參考解答

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 對於任意實數 x 與 y，函數 f 與 g，都有 $g(f(x))=x$，且 $f(g(y))=y$。若對於所有實數 x，$f(x)=kx+h(x)$，其中 k 是常數，且 $h(x)$是週期函數。試證 $g(x)$同樣也可以表示爲一個線性函數與一個週期函數的和。(註：對於任意實數 x，若 $h(x+p)=h(x)$，其中 p 爲固定的實數，則我們稱 $h(x)$爲週期函數。)(五分)

解：

對於任意實數 x 與 y，函數 f 與 g，都有 $g(f(x))=x$，且 $f(g(y))=y$

- f、g 為一對一且映成函數 • $k\neq 0$

令 $f(x)=kx+h(x)=y$，則 $x=g(f(x))=g(kx+h(x))=g(y)$

$g(k(x+p)+h(x+p))=x+p$，即 $g(y+kp)=x+p=g(y)+p$

令 $l(y)=g(y)-\frac{y}{k}$，則 $l(y+kp)=g(y+kp)-\frac{y+kp}{k}=g(y)+p-\frac{y}{k}-p=l(y)$

- $g(y)=\frac{y}{k}+l(y)$，其中 l 爲周期是 kp 的函數。

評分標準：

(1) 說明 f、g 為一對一且映成函數→$\frac{1}{7}$。

(2) 證明 $g(y)=x$→$\frac{1}{7}$。

(3) 證明 $g(y+kp)=g(y)+p$→$\frac{3}{7}$。

(4) 會設 $l(y)=g(y)-\frac{y}{k}$→$\frac{2}{7}$。

(5) 求出 $g(y)=\frac{y}{k}+l(y)$→$\frac{2}{7}$。

2. 甲、乙二人輪流由一堆珠子中取珠子。由甲先取，每次可以取 1 或 10 顆珠子，接著乙必須取 m 或 n 顆珠子；無法再依照上述規則取珠子者爲輸家。若無論這堆珠子有多少顆，甲都有必勝的策略，試求 m、n 之值。(五分)

解：

m、n 之值為滿足 m、$n\geq 9$ 且$|n-m|\neq 9$ 的所有正整數組。

不失一般性，我們可以假設 $m\leq n$。

(1) 證明除此之外的正整數組 m、n 均不滿足要求。假設共有 s 顆珠子。

(1.1) 當 $1\leq m\leq 8$ 時，若 $s=m+1$，則甲只能取 1 顆，乙可以將剩餘的珠子全部取走，甲必敗。

(1.2) 當 $n=m+9$ 時，若 $s=m+10$，則甲取 1 顆，乙就取以 $n=m+9$ 顆；

甲取 10 顆，乙就取以 m 顆；無論甲如何取，以都能將剩餘的珠子全部取走，甲必敗。

所以除此之外的正整數組 m、n 均不滿足要求。

(2) 當 m、$n\geq 9$ 且 $n-m\neq 9$ 時

(2.1) 若 $s\leq m$，甲取 1 顆，即獲勝。

(2.2) 若 $m<s\leq n$，甲可選擇一種取法，使得剩餘珠子的數目不為 m 或 n；因為無論取 1 顆或 10 顆，剩餘珠子的數目必小於 n，且至多只有一種取法使剩餘珠子的數目為 m，甲只要選擇另一種即可。

(2.2.1)此時，若剩餘珠子的數目小於 m，則甲獲勝。

(2.2.2)此時，若剩餘珠子的數目大於 m，則乙只能取 m 顆珠子，甲再選擇一種取法，使得剩餘珠子的數目不為 m，依此類推，總可使得某次取後，剩餘珠子的數目小於 m，則甲獲勝。

(2.3)若 $s>n$，甲仍可選擇一種取法，使得剩餘珠子的數目不為 m 或 n；否則 $m+10=n+1$，與 $n-m\neq 9$ 矛盾。此時，不論乙取 m 或 n 顆珠子，都無法將剩餘的珠子全部取完；於是，甲可再選擇一種取法，使得剩餘珠子的數目不為 m 或 n；依此類推，總可使得某次取後，剩餘珠子的數目不大於 n，則甲獲勝。

所以當 m、$n\geq 9$ 且 $|n-m|\neq 9$ 時，甲都有必勝策略。

評分標準：

(1) 宣布 m、$n\geq 9\rightarrow \frac{1}{7}$。

(2) 宣布 m、$n\geq 9$ 且 $|n-m|\neq 9\rightarrow \frac{2}{7}$。

(3) 證明 $1\leq m\leq 8$ 的情況$\rightarrow \frac{1}{7}$。

(4) 證明 $n=m+9$ 的情況$\rightarrow \frac{1}{7}$。

(5) 證明的情況 m、$n\geq 9\rightarrow \frac{3}{7}$。

3. 小丁心裡想著兩個正數 x、y，並在黑板上依隨意的順序寫下 $x+y$、$x-y$、$x\times y$ 及 $x\div y$ 四個數，然後請小方來猜他心裡想的那兩個數。試證只看到黑板上所寫的四個數，小方一定有足夠的訊息可以唯一地算出 x、y 之值。(五分)

解：

令 $S=\{x+y, x-y, x\times y, x\div y\}$

首先，由於 x、y 爲正數，故在 $x+y$、$x-y$、$x\times y$、$x\div y$ 中只有 $x-y$ 可能不是正數。以下分三種情況討論：

(1) S 含 0，則 $x=y$、$x\div y=1$。

考慮 S 中非零數的積，由 $(x\times y)(x+y)=2x^3$ 可得到 x、y。

(2) S 含負數，這時有 $x<y$、$x\div y<1$。記 $T=\{x+y, x\times y, x\div y\}$

令 N 爲 T 中小於 1 的數的個數

(2.1) $N=1$，則 T 中最小的數爲 $x\div y$。由 $x-y$、$x\div y$ 可確定 x、y。

(2.2) $N=2$，這時 $x+y$ 不能小於 1（若 $x+y<1 \Rightarrow x<y<1 \Rightarrow x\times y<1 \Rightarrow N=3$），則 T 中最大的數爲 $x+y$。由 $x-y$、$x+y$ 可確定 x、y。

(2.3) $N=3$，這時 $x+y<1$，有 $x<y<1$，於是 $x\times y<x+y$、$x\times y<x\div y$，$x\times y$ 爲 T 中最小的數。由 $x-y$、$x\times y$ 可確定 x、y。

(3) S 中均爲正數。

我們證明可將 S 中四個數分爲兩組 A、B，每組兩個數，使得 A 中兩數之和的平方爲 B 中兩數之積的 4 倍，且 A 中的數之數值唯一確定。

由於可取 $A=\{x+y, x-y\}$，$B=\{x\times y, x\div y\}$，從而若上面斷言成立，則 A 中兩數的值必爲 $x+y$、$x-y$，這樣便可確定 x、y。

現在證明這一點：令 $S=\{a, b, c, d\}$，假設有分法 A、B 和 A'、B'；A 和 A'不同，則有兩種可能：

(3.1) A 和 A'沒有相同的數，

令 $A=\{a, b\}$、$A'=\{c, d\}$；則 $B=\{c, d\}$，$B'=\{a, b\}$

這時有 $(a+b)^2=4cd$、$(c+d)^2=4ab \Rightarrow (a-b)^2+(c-d)^2=0 \Rightarrow a=b$、$c=d$；

進而由 $(a+b)^2=4cd$，得到 $a=b=c=d$ 或 $a=b=-c=-d$

前者要求 $x+y=x-y$，後者說明有兩個負數，均不可能！

(3.2) A 和 A'恰有一個相同的數，

不妨設 $A=\{a, b\}$、$A'=\{a, c\}$，且 b 不等於 c。

於是 $(a+b)^2=4cd$、$(a+c)^2=4bd$；將此二等式的兩端分成乘以 b、c，再將兩式相減得 $b(a+b)^2-c(a+c)^2=0$，

即 $(b-c)[a^2+2a(b+c)+b^2+bc+c^2]=0$

但是 $b-c$ 非零，且由 a、b、c 爲正數有 $a^2+2a(b+c)+b^2+bc+c^2>0$。

矛盾！

以上分析說明可唯一確定 x、y。

評分標準：

(1) 知道有 0 或負數時，此數必為 $x-y$→$\frac{1}{7}$。

(2) 用小於 1 分類討論→$\frac{1}{7}$。

(3) 證明有 1 個負數時，可以唯一地算出 x、y 之值→$\frac{4}{7}$。

(4) 知道找兩數之和的平方爲另兩數之積的 4 倍→$\frac{1}{7}$。

(5) 證明全為正數時，可以唯一地算出 x、y 之值→$\frac{2}{7}$。

(6) 討論兩數之和的平方爲另兩數之積的 4 倍的分法唯一→$\frac{1}{7}$。

4. 已知圓心爲 I 的圓整個都落在圓心爲 O 的大圓的內部。線段 AB 是大圓內變動的弦，且與小圓相切。試求三角形 IAB 的外心的軌跡。(六分)

解：

設 P 爲 IAB 的外心，AB 與圓 I 相切於 C；連 OP 交 AB 於 D；作 $IE\perp OP$

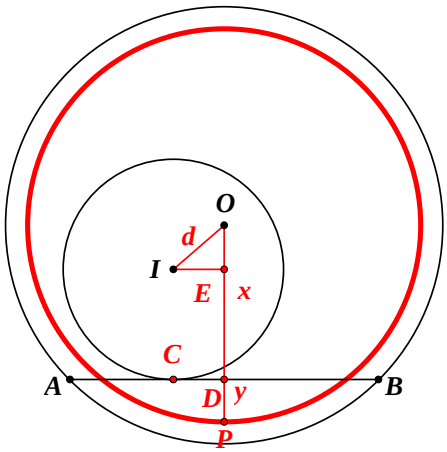
於 E。

令圓 O 半徑爲 R、圓 I 半徑爲 r、$OI=d$、$OD=x$、$PD=y$；則有

$PI^2=PE^2+IE^2=(y+r)^2+[d^2-(x-r)^2]$

與 $PA^2=y^2+(R^2-x^2)$。又 $PI=PA$

- $y^2+(R^2-x^2)=(y+r)^2+[d^2-(x-r)^2]$
  $=y^2+d^2-x^2+2r(x+y)$
- $2r(x+y)=R^2-d^2$
- $OP=x+y=\dfrac{R^2-d^2}{2r}$



於是三角形 IAB 外心 P 的軌跡是以 O 爲圓心，$\dfrac{R^2-d^2}{2r}$ 爲半徑的圓。

評分標準：

(1) 宣布三角形 IAB 外心的軌跡是以 O 爲圓心的圓→$\dfrac{2}{7}$。

(2) 求出正確的半徑→$\dfrac{2}{7}$。

(3) 完整證明→$\dfrac{3}{7}$。

5. 有 A、B 兩種矩形紙板各許多片。假設可以用數片 A 種矩形拼出一個與 B 種矩形相似的矩形，試證也可以用數片 B 種矩形拼出一個與 A 種矩形相似的矩形。注意：拼這些矩形時，紙板不允許重疊也不允許中間有空隙。(七分)

解：

設 A 種矩形的長、寬分別為 a_1、a_2，B 種矩形的長、寬分別為 b_1、b_2，則 A 種矩形拼出的矩形之長、寬可以分別寫成 $u_1a_1+u_2a_2$、$v_1a_1+v_2a_2$，其中 u_1、u_2、v_1、v_2 均為非負整數；又與 B 種矩形相似，所以有 $\dfrac{u_1a_1+u_2a_2}{v_1a_1+v_2a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\cdots(*)$。

(1) 若 $\dfrac{a_1}{a_2}$ 為無理數，我們證明：A 種矩形只能「平凡地」拼出大矩形；所謂「平凡」是指全部的矩形之間以長重合或寬重合的方式相接。

對所用的 A 種矩形個數 n 用歸納法：

$n=1$ 時，顯然成立。設 $2\le n\le k-1$ 時，均成立。

當 $n=k$ 時，考慮大矩形最上方的第一列，

(1.1)均為邊重合方式拼排的 A 種矩形；此時，大矩形最上方的第一列就是一列 A 種矩形，以長重合的方式相接，如圖 5-1。由歸納假設可知，大矩形其餘部分的拼排方式是「平凡的」，且方向與第一列相同。不然，將與 $\dfrac{a_1}{a_2}$ 為無理數矛盾！

(1.2)從左邊開始看，直到出現一個不是以邊重合方式拼排的 A 種矩形（如圖 5-2 中粗線矩形）。考慮「縫隙」PQ，該「縫隙」不會在 Q 處結束，否則，將與 $\frac{a_1}{a_2}$ 為無理數矛盾！於是第二列的拼排方式應與第一列相同，直到「縫隙」PQ 處。同樣的，可得大矩形在直線 PQ 左邊的部分是「平凡地」拼排；由歸納假設可知，在直線 PQ 右邊的部分也是如此，且方向相同。

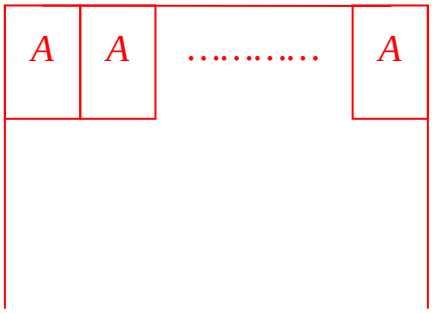


圖 5-1

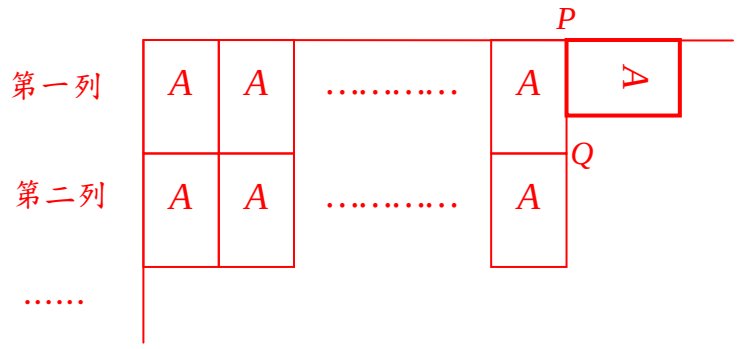


圖 5-2

於是我們證明了，A 種矩形只能「平凡地」拼出大矩形，如此，相當於 $u_1=v_2=0$ 或 $u_2=v_1=0$。不妨設 $u_2=v_1=0$，則由(＊)得 $\frac{u_1a_1}{v_2a_2}=\frac{b_1}{b_2}\Rightarrow\frac{v_2b_1}{u_1b_2}=\frac{a_1}{a_2}$；將 B 種矩形如圖 5-3 拼排，即可得相似於 A 種矩形的大矩形。

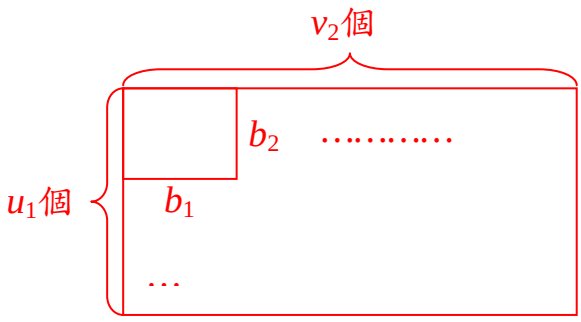


圖 5-3

(2) 若 $\frac{a_1}{a_2}$ 為有理數，不失一般性，我們可以假設 a_1、a_2、b_1、b_2 均為正整數，

由(＊)得 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{v_2b_1-u_2b_2}{u_1b_2-v_1b_1}=\frac{v_2b_1{}^2b_2-u_2b_1b_2{}^2}{u_1b_1b_2{}^2-v_1b_1{}^2b_2}=\frac{\left(v_2b_1b_2-u_2b_2{}^2\right)b_1}{\left(u_1b_1b_2-v_1b_1{}^2\right)b_2}$；將 B 種矩形類似圖 5-3 拼排，將 v_2 換為 $v_2b_1b_2-u_2b_2{}^2$、u_1 換為 $u_1b_1b_2-v_1b_2{}^2$，即可得相似於 A 種矩形的大矩形。

評分標準：

(1) 證明長、寬均為整數的情況→1/7。

(2) 證明長、寬均為有理數的情況→3/7。

(3) 討論 $\frac{a_1}{a_2}$ 為無理數的情況，其排列方式為「平凡的」→4/7。

6. 給定一個大於 3 的質數 n。若一個三角形每個內角的度數都可以表示爲 $\frac{m}{n}180^\circ$ 的形式，其中 m 爲正整數，則我們稱這個三角形爲「可分解三角形」。開始時，在桌上有一個「可分解三角形」的紙片，每次操作可以從桌子上取一個三角形紙片，將它分割爲二個「可分解三角形」然後放回桌上，但要求切割後桌上的所有三角形不能有任何二個三角形相似。重複上述操作，直到無法繼續操作爲止。試證在此時桌子上會有每一種可能切出的「可分解三角形」。(八分)(註：兩個「可分解三角形」只要內角都相等，我們則視它們爲同一種。)

解：

對於給定的質數 n，令 $S=\{a,b,c \mid a,b,c\in N^+；a+b+c=n\}$，則 S 與可能切出的「可分解三角形」恰可一對一對應，即每一組$\{a,b,c\}$相當於三內角為 $\frac{a}{n}180^\circ$、$\frac{b}{n}180^\circ$、$\frac{c}{n}180^\circ$的一種三角形。

再令 $\Delta_{a,b,c}=\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}$，不失一般性，可設 n 為質數，$n>3$ 則$\triangle_{a,b,c}>0$；我們只要證明下述結論即可：只要桌上還有一種三角形沒有出現，則一定可以繼續操作。

用反證法證明：設桌上已有的三角形為 A 集合（$A\neq\varnothing$），且已無法再操作了。令 $\Delta_{\bar a,\bar b,\bar c}=\max\limits_{\{a,b,c\}\in A}\Delta_{a,b,c}$，不妨設 $\bar a\le\bar b\le\bar c$，則 $\Delta_{\bar a,\bar b,\bar c}=\bar c-\bar a$。

若 $\bar a\neq\bar b$，我們考慮三角形$\{\bar a,\bar a+\bar c,\bar b-\bar a\}$：$\Delta_{\bar a,\bar a+\bar c,\bar b-\bar a}\ge(\bar c+\bar a)-\bar a=\bar c>\Delta_{\bar a,\bar b,\bar c}$則 $\{\bar a,\bar a+\bar c,\bar b-\bar a\}\notin A$，即三角形$\{\bar a,\bar a+\bar c,\bar b-\bar a\}$未出現在桌上；則可將三角形$\{\bar a,\bar b,\bar c\}$如圖 6-1 切出三角形$\{\bar a,\bar a+\bar c,\bar b-\bar a\}$，產生矛盾！所以$\bar a=\bar b$。

於是，我們有$\{\bar a,\bar a,\bar c\}\in A$，$\bar a<\bar c$，考慮三角形$\{\bar a,2\bar a,\bar c-\bar a\}$：如果 $\{\bar a,2\bar a,\bar c-\bar a\}\notin A$，則可將三角形$\{\bar a,\bar a,\bar c\}$如圖 6-2 切出三角形$\{\bar a,2\bar a,\bar c-\bar a\}$產生矛盾！所以$\{\bar a,2\bar a,\bar c-\bar a\}\in A$則

$$\Delta_{\bar a,2\bar a,\bar c-\bar a}\ge 2\bar a-(\bar c-\bar a)=3\bar a-\bar c\Rightarrow 3\bar a-\bar c\le\Delta_{\bar a,2\bar a,\bar c-\bar a}\le\Delta_{\bar a,\bar a,\bar c}=\bar c-\bar a\Rightarrow 2\bar a\le\bar c$$

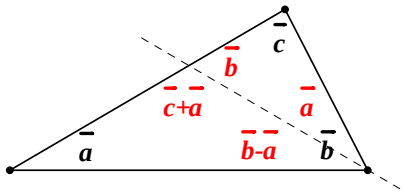


圖 6-1

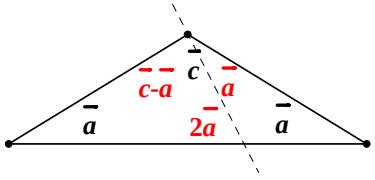


圖 6-2

若 $2\bar a<\bar c$，繼續考慮三角形$\{\bar a,3\bar a,\bar c-2\bar a\}$，同理可得$\{\bar a,3\bar a,\bar c-2\bar a\}\in A$則 $3\bar a\le\bar c$……顯然，$k\bar a\le\bar c$不可能永遠成立下去，因此，必存在 $l\in N^+$，使得$l\bar a=\bar c$則$(l+2)\bar a=n$。

$\because n$ 為質數，$n>3$ $\therefore l$ 為奇數，$\bar a=1$。

令 $n=2k+3(k\ge1)$，則$\{1,1,2k+1\}$、$\{1,2,2k\}\cdots\{1,k+1,k+1\}\in A$；記$\inf_{\{a,b,c\}}=\min\limits_{\{a,b,c\}\in A}\{a,b,c\}$，則 $I_1=\{a,b,c \mid \inf_{\{a,b,c\}}=1\}\subset A$；下面用歸納法證明：對於每一個 j，$I_j=\{a,b,c \mid \inf_{\{a,b,c\}}=j\}\subset A\cdots(*)$。

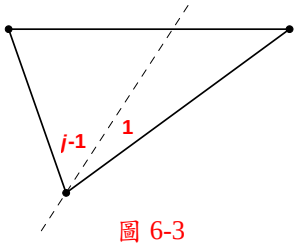


圖 6-3

假設小於 j 時，(＊)均成立。當等於 j 時，對於每一個 $S=\{a, b, c\}\in I_j$，將 S 如圖 6-3 切分為 S'和 S''，則 $S'\in I_1\subset A$、$S''\in I_{j-1}\subset A$，且 $S'\neq S''$，操作合法，所以 $S\in A$ 可得 $I_j\subset A$。

所以到無法繼續操作時，桌子上會有每一種可能切出的「可分解三角形」。

評分標準：

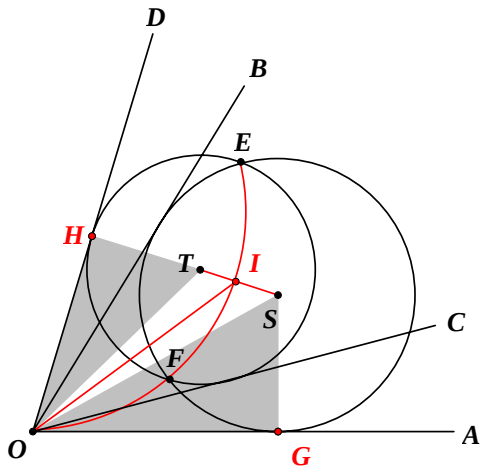
(1).宣佈只要桌上還有一種三角形沒有出現，則一定可以繼續操作→1/7。

(2) 考慮等腰三角形的情況→1/7。

(3) 考慮一般三角形的情況→5/7。

7. 由點 O 出發的射線 OA、OC、OB、OD 在平面上依逆時針方向排列，$\angle AOB=\angle COD$。已知圓 S 與 OA、OB 相切，圓 T 與 OC、OD 相切，且圓 S 與圓 T 交於 E、F 二點。試證 $\angle AOE=\angle DOF$。(八分)

解一：



設圓 S 與圓 T 的半徑分別為 r_S、r_T，圓 S 切 OA 於 G，圓 T 切 OD 於 H，則

$\angle SOG=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\angle COD=\angle TOH$，

$\angle OGS=90^\circ=\angle$OHT 可得$\triangle SOG$ 相似於 $\triangle TOH$ 可得 $\frac{OS}{OT}=\frac{SG}{TH}=\frac{r_S}{r_T}=\frac{ES}{ET}=\frac{FS}{FT}$。

令過 O、E、F 的圓為圓 U，則圓 U 即是滿足 $\frac{PS}{PT}=\frac{r_S}{r_T}$ 的 P 點軌跡。

設圓 U 與線段 ST 交於 I 點，則 $\frac{IS}{IT}=\frac{r_S}{r_T}=\frac{OS}{OT}$ 可得線段 OI 是 $\angle TOS$ 的角平分線；又 $EI=IF$ 可得 $\angle IOE=\angle IOF$，所以

$\angle AOE=\angle AOS+\angle SOI+\angle IOE=\angle DOT+\angle TOI+\angle IOF=\angle DOF$

評分標準：

(1)證明$\triangle SOG$ 相似於$\triangle TOH\rightarrow\frac{1}{7}$。

(2)證明線段 OI 是 $\angle TOS$ 的角平分線$\rightarrow\frac{3}{7}$。

(3)證明 $\angle IOE=\angle IOF\rightarrow\frac{2}{7}$。

(4)證明 $\angle AOE=\angle DOF\rightarrow\frac{1}{7}$。

解一：(高雄中學蔡政江的解答)