注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2004 秋季賽　高中組　初級卷　參考解答

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 三個圓都通過 X 點，它們異於 X 點的其他交點分別為 A、B、C 三點。點 A' 是直線 AX 與三角形 BCX 的外接圓的另一個交點；點 B'是直線 BX 與三角形 ACX 的外接圓的另一個交點；點 C'是直線 CX 與三角形 ABX 的外接圓的另一個交點。試證：三角形 ABC'、$AB'C$、$A'BC$ 兩兩相似。(三分)

解：

若三圓相交情形如圖(1)，$A'BXC$、$AB'CX$、$AXBC'$為圓內接四邊形

$\angle ABC' = \angle AXC'$（等弧對等圓周角）$= \angle A'XC$（對頂角）

$= \angle A'BC$（等弧對等圓周角）$= 180^\circ - \angle AXC$（$\angle AXA' = 180^\circ$）

$= \angle AB'C$（$AB'CX$ 為圓內接四邊形）

同理可證，$\angle A'BC = \angle AB'C = \angle ABC'$，$\angle BA'C = \angle B'AC = \angle C'AB$

$\therefore \triangle A'BC \approx \triangle AB'C \approx \triangle ABC'$

若三圓相交情形如圖(2)，同理可證。

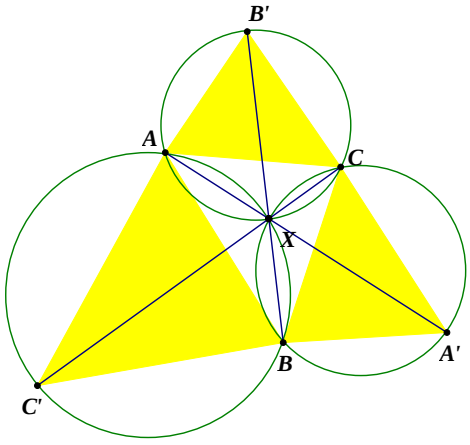


圖 1

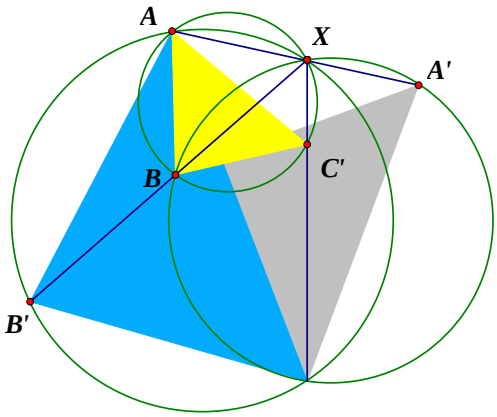


圖 2

評分標準：

(1)會用等弧對等圓周角→$\frac{2}{7}$。

(2)會用圓內接四邊形內對角和 180°→$\frac{2}{7}$。

(3)只證明其中一種情況→$\frac{6}{7}$。

2. 在一個盒子內有藍、紅、白三種顏色的珠子共 100 顆。已知我們隨意從盒內取出 26 顆珠子，可以保證至少有 10 顆珠子的顏色是相同的。請問我們至少要從盒內隨意取出多少顆珠子，在滿足上述條件下，無論各種顏色的珠子如何分配，也一定可以保證至少有 30 顆珠子的顏色是相同的？(三分)

解：

(1)首先，我們要指出只取出 65 顆的珠子是不夠的。

我們可以在盒子中放 47 顆藍色珠子、46 顆紅色珠子與 7 顆白色珠子，如果我們隨意從盒內取出 26 顆珠子，取出的珠子中藍色珠子與紅色珠子至少有 26－7＝19 顆，根據鴿籠原理，至少有 10 顆藍色珠子或至少有 10 顆紅色珠子，滿足題目條件。

在這樣的情況下，我們隨意從盒內取出 65 顆珠子，結果有可能是 29 顆藍色珠子、29 顆紅色珠子與 7 顆白色珠子，三種顏色的珠子都不到 30 顆，所以，只取出 65 顆的珠子是不夠的。

(2)再證明取出 66 顆的珠子，就可以保證：無論各種顏色的珠子如何分配，至少有 30 顆珠子的顏色是相同的。

不失一般性，我們可以假設盒子內三種顏色的珠子顆數是藍色≧紅色≧白色珠子。

如果盒子中白色珠子不超過 7 顆，我們隨意從盒內取出 66 顆珠子，取出的珠子中藍色珠子與紅色珠子至少有 66－7＝59 顆，根據鴿籠原理，至少有 30 顆藍色珠子或至少有 30 顆紅色珠子，

如果盒子中白色珠子至少有 9 顆，我們隨意從盒內取出 26 顆珠子，結果有可能是 9 顆藍色珠子、9 顆紅色珠子與 8 顆白色珠子，未滿足題目條件。

如果盒子中恰有 8 顆白色珠子，藍色珠子與紅色珠子不可能都至少有 9 顆，否則無法滿足題目條件。所以白色珠子與紅色珠子都恰有 8 顆，我們隨意從盒內取出至少 66 顆珠子，至少有 50 顆藍色珠子。

評分標準：

(1)指出必有一種顏色的珠子數量小於等於 7→$\frac{1}{7}$。

(2)指出必有一種顏色的珠子數量小於等於 7 或有二種顏色的珠子數量等於 8→$\frac{1}{7}$。

(3)指出取 66 顆珠子是足夠的→$\frac{2}{7}$。

(4)證明取 66 顆珠子是足夠的→$\frac{2}{7}$。

(5)給出例子說明取 65 顆珠子是不夠的→$\frac{2}{7}$。

3. 設 $P(x)$及 $Q(x)$均為非常數的多項式。對於每一個 x，都有 $P(P(x))=Q(Q(x))$，且 $P(P(P(x)))=Q(Q(Q(x)))$。請問是否能保證 $P(x)=Q(x)$？(四分)

解：

因為 $P(x)$及 $P(P(x))$均為非常數的多項式，它們的值域有無限多個值。

對任一個在其值域中的 x，

令 $x=P(P(t))=Q(Q(t))$，則 $P(x)=P(P(t))=Q(Q(t))=Q(x)$

這對無限多個值都成立，且 $Q(x)$與 $Q(Q(x))$ 也均為非常數的多項式，

因此對於每一個 x，我們都有 $P(x)=Q(x)$。

評分標準：

(1)指出 $P(x)$及 $P(P(x))$的值域有無限多個值→$\frac{2}{7}$。

(2)指出有無限多個 x 可以使得 $P(x)=Q(x)$→$\frac{3}{7}$。

(3)指出 $Q(x)$ 也是非常數的多項式，因此對於每一個 x，我們都有 $P(x)=Q(x)$→$\frac{2}{7}$。

4. 將 2004 分拆為一個或一個以上的正整數之和，且這些正整數「差不多相等」。所謂一些正整數「差不多相等」是指它們之中的任意兩個數的差等於 1 或 0。請問滿足上述條件的分拆方法共有多少種？（注意：如果分拆後的正整數都相同，但只有次序不同，視其為同一種分拆方法。）(四分)

解：

對於任意整數 k，$1\le k\le 2004$，利用算數定理，我們可以找到唯一的數對 (q, r)，使得 $2004=kq+r$，$0\le r\le k-1$。

$\underbrace{(q+1)+(q+1)+\ldots+(q+1)}_{r\text{個}}+\underbrace{q+q+\ldots+q}_{k-r\text{個}}=r(q+1)+(k-r)\,q=kq+r=2004$，即 2004 可以分拆為 r 個$(q+1)$與$(k-r)$個 q，且$(q+1)$與 q 是「差不多相等」的正整數。

所以，對於每一個 k，我們都可以得到一個滿足題目條件的唯一分拆方法，而 k 可以取 1、2、…、2004，所以共有 2004 種分拆方法。

評分標準：

(1)給出 5 個以上的正確分拆例子→$\frac{1}{7}$。

(2)會用$\left[\frac{2004}{k}\right]$之值→$\frac{2}{7}$。

(3)會分為 r 個$(q+1)$與$(k-r)$個 q→$\frac{5}{7}$。

(4)說明對於每一個 k，分拆方法是唯一的→$\frac{2}{7}$。

5. 試找出滿足下列條件的所有正整數 N：

將 1、2、3、…、N $(N>1)$重排，使得任意二個或二個以上的連續項之平均都不是正整數。(五分)

解：

$1+2+3+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}\Rightarrow$平均$=\frac{N(N+1)}{2N}=\frac{N+1}{2}$。如果 N 是奇數，平均$\frac{N+1}{2}$就是正整數，不符合要求不合，所以 N 只能是偶數。

對於任一個偶數 N，先將 $1\sim N$ 由小到大依序排列後，從頭開始兩兩對調排列，即重排為 2、1、4、3、6、5、…、N、$N-1$。

考慮連續 k 項的平均，其中 $2\le k\le N$：

(1)若 k 為奇數

(i) a 為偶數，連續 k 項的和為

$a+(a-1)+(a+2)+(a+1)+\ldots+(a+k-3)+(a+k-4)+(a+k-1)$

$=(a-1)+a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+k-4)+(a+k-3)+(a+k-2)+1=\frac{k(2a+k-3)}{2}+1$

其平均為 $\left[\frac{k(2a+k-3)}{2}+1\right]=\frac{2a+k-3}{2}+\frac{1}{k}=a+\frac{k-3}{2}+\frac{1}{k}$，$k$ 為奇數$\Rightarrow\frac{k-3}{2}$ 為整數，$\frac{1}{k}$ 不為整數$\Rightarrow a+\frac{k-1}{2}+\frac{1}{k}$ 不為整數，即此連續 k 項平均不為整數。

(ii)a 為奇數，連續 k 項的和為

$a+(a+3)+(a+2)+(a+5)+(a+4)+\ldots+(a+k)+(a+k-1)$

$=(a+1)-1+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)+\ldots+(a+k-1)+(a+k)=\frac{k(2a+k+1)}{2}-1$

其平均為 $\frac{1}{k}\left[\frac{k(2a+k+1)}{2}-1\right]=\frac{2a+k+1}{2}-\frac{1}{k}=a+\frac{k+1}{2}-\frac{1}{k}$，$k$ 為奇數$\Rightarrow\frac{k+1}{2}$ 為整數，$\frac{1}{k}$ 不為整數$\Rightarrow a+\frac{k+1}{2}-\frac{1}{k}$ 不為整數，即此連續 k 項平均不為整數。

(2)若 k 為偶數

(i) a 為偶數，連續 k 項的和為 $a+(a-1)+(a+2)+(a+1)+\ldots+(a+k-2)+(a+k-3)$

$=(a-1)+a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+k-3)+(a+k-2)=\frac{k(2a+k-3)}{2}$，其平均為

$\frac{1}{k}\left[\frac{k(2a+k-3)}{2}\right]=\frac{2a+k-3}{2}=a+\frac{k-3}{2}$，$k$ 為偶數$\Rightarrow\frac{k-3}{2}$ 不為整數$\Rightarrow a+\frac{k-3}{2}$ 不為整數，即此連續 k 項的平均不為整數。

(ii)a 為奇數，連續 k 項的和為

$a+(a+3)+(a+2)+(a+5)+(a+4)+\ldots+(a+k-1)+(a+k-2)+(a+k+1)$

$=(a+1)-1+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)+\ldots+(a+k-2)+(a+k-1)+(a+k)+1$

$=\frac{k(2a+k+1)}{2}$，其平均為 $\frac{1}{k}\left[\frac{k(2a+k+1)}{2}\right]=\frac{2a+k+1}{2}=a+\frac{k+1}{2}$，$k$ 為偶數

$\Rightarrow\frac{k+1}{2}$ 為整數$\Rightarrow a+\frac{k+1}{2}$ 不為整數，即此連續 k 項的平均不為整數。

對於每一個 k，$2\le k\le N$，任意連續 k 項的平均都不是正整數，所以任意一個偶數 N 均滿足題目條件。

評分標準：

(1)給出例子，說明 n 為偶數($n\ge 6$)時是可行的→$\frac{1}{7}$。

(2)證明 n 不能為奇數→$\frac{2}{7}$。

(3)證明 n 為偶數，但只考慮連續偶數項、連續奇數項、或由奇數項開始、由偶數開始→$\frac{2}{7}$。

(4)分 k 為奇、偶數，a 為奇、偶數討論→$\frac{2}{7}$。