注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2005 春季賽　國中組　高級卷　20/03/2005

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 點 A、B 爲一元二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形上的相異兩點，其中 a、b、c 爲整數。若點 A、B 的兩個座標都是整數，且線段 AB 的長也是整數，試證直線 AB 平行於 x 軸。(四分)

解：

設 $A(x_1,y_1)$，$B(x_1,y_1)$，其中 $x_1,x_2,y_1,y_2\in Z$

則

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ ,$$

因

$$y_1-y_2=a\left(x_1^2-x_2^2\right)+b(x_1-x_2)=(x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b)\ ,$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_2)^2(ax_1+ax_2+b)^2}\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2(1+(ax_1+ax_2+b)^2)}\\&=|x_1-x_2|\sqrt{1+m^2}\end{aligned}$$

其中 $m=ax_1+ax_2+b$，$|x_1-x_2|\in Z$

若 $\overline{AB}$ 為整數，則 $1+m^2$ 為一完全平方數。

令 $1+m^2=n^2$，可得 $m=0$，$n=1$。

因此 $y_1-y_2=0$，即 $y_1=y_2$，所以直線 AB 平行於 x 軸

評分標準：

01. 寫出 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，1/7 分
02. 寫出 $y_1-y_2=a\left(x_1^2-x_2^2\right)+b(x_1-x_2)=(x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b)$，1/7 分
03. 證出 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2(1+(ax_1+ax_2+b)^2)}$，2/7 分
04. 說明 $1+m^2$ 為一完全平方數，1/7 分
05. 求證 $m=0$，$n=1$，1/7 分
06. 說明直線 AB 平行於 x 軸，1/7 分

2. 三角形 ABC 的兩條高 AD 和 BE 交於點 H。點 X、Y 分別爲線段 AB 及 CH 之中點，試證直線 XY 與直線 DE 互相垂直。(五分)

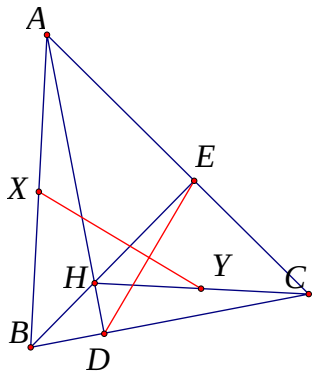
解：

1° Y 為直角三角形 CEH 與 CDH 的斜邊中點，所以

$$\overline{EY} = \overline{ED}$$

2° X 為直角三角形 ABD 與 ABE 的斜邊中點，所以

$$\overline{XE} = \overline{XD}$$



3° <WAY 1>

由 1°及 2°可知四邊形 $DXEY$ 為鳶形，

因此對角線 XY 與對角線 DE 互相垂直。

<WAY 2>

由 1°及 2°可知，Y 都在線段 DE 的中垂線上，

故線段 XY 與線段 DE 互相垂直。

評分標準：

01. 說明 $\overline{EY} = \overline{ED}$，2/7 分
02. 說明 $\overline{XE} = \overline{XD}$，2/7 分
03. <WAY 1> 看出四邊形 $DXEY$ 為鳶形，1/7 分；
再依此說明線段 XY 與線段 DE 互相垂直，2/7 分
04. <WAY 2> 說明線段 XY 與線段 DE 互相垂直，3/7 分

3. 有一款名貴手錶的表面爲圓形且沒有任何圖案或記號，只有互不等長的時針、分針和秒針，這些錶針的轉速都與一般準確的手錶相同。該款手錶的設計師宣稱他可用這款手錶辨別 8:00 到 19:59 之間的所有時刻，理由是該款手錶各錶針之間的相對位置在此期間內都不會重複。請問這位設計師所說的理由正確嗎？(五分)

解：

1° 時針，分針，秒針的角速率比為 5：60：3600＝1：12：720

2° 設在時刻之後的 b 時刻手錶上的時針，分針，秒針的相對位置完全相同，此時時針走了 t°，則可得：

$$12t = t + 360m$$
$$720t = t + 360n$$

即

$$11t = 360m$$
$$719t = 360n$$

其中 m，n 皆為整數。

因 11 為質數且為整數，可知 m 為 11 之倍數，令 m=11k，可得 t 為 360k。由此可知時針要走一圈以上才可能有完全相同的相對位置。所以 8:00 到 19:59 之間的所有時刻，該款手錶各錶針之間的相對位置在此期間內都不會重複。

評分標準：

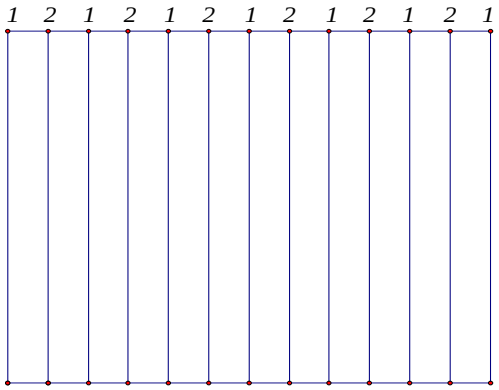
01. 說明時針，分針，秒針的角速率比為 1：12：720，2/7 分
02. 正確說明並假設出 12t＝t＋360m，3/7 分
03. 說明相對位置在此期間內都不會重複，2/7 分

4. 將一張 10×12 的方格表沿格線摺疊若干次後而得到一疊 1×1 的正方形。進行以下之操作：
   (a) 沿最後得到這疊正方形某一對的對邊中點恰剪一刀；(二分)
   (b) 沿最後得到這疊正方形某一對的鄰邊的中點恰剪一刀。(四分)
   剪開後再將紙片展開，請問可得到多少張紙片？(註：確定所有可能的答案，並證明除此之外沒有別的答案。)

解：

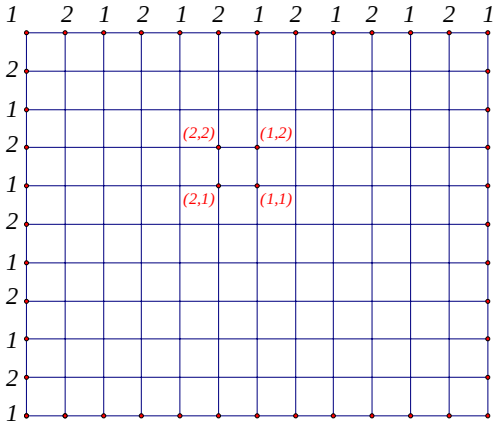
(a) 如下左圖，將鉛直格線 1，2，1，2…編號。寬為 12 格，共有 13 條格線，不論怎麼摺，編號 1 必重疊，編號 2 也必重疊。所以沿鉛直的中線（已摺疊完成的正方形）剪一刀，編號 1 的有 7 塊，編號 2 的有 6 塊，所以共有 7＋6＝13 塊。

如下右圖，將水平格線 1，2，1，2…編號。長為 10 格，共有 11 條格線，不論怎麼摺，編號 1 必重疊，編號 2 也必重疊。所以沿水平的中線（已摺疊完成的正方形）剪一刀，編號 1 的有 6 塊，編號 2 的有 5 塊，所以共有 6＋5＝11 塊。





(b) 將鉛直格線 1，2，1，2…編號以及水平格線 1，2，1，2…編號。如此格線的交點處編碼有四類：(1,1)，(1,2)，(2,1)，(2,2)；且每個小方格四個角落的編碼剛好一類一個。經折疊後，可發現編碼相同的點完全重疊。因編碼為(1,1)的點共有 6×7＝42 個，所以如果沿(1,1)相鄰邊的中點連線剪一刀，則有 42 小塊被剪下以及留下大塊共 42＋1＝43 塊紙片。同理，剪編碼(1,2)有 7×5＋1＝36 塊，剪編碼(2,1)有 6×6＋1＝37 塊，剪編碼(2,2)有 6×5＋1＝31 塊。



評分標準：

（a） 只有結果沒有理由，3/7 分；理由充分，7/7 分
（b） 只有結果沒有理由，3/7 分；理由充分，7/7 分

5. 有一種遊戲是將數個長方體的木塊全部恰好裝入一個長方體鐵盒內(鐵盒的體積等於木塊的總體積)。由於製造上的誤失，每個木塊的長、寬、高恰有一項比原設計稍小(不同的木塊中可能有的長較小、有的寬較小或有的高較小)。無論這些木塊的誤失爲何，請問是否存在有一個長方體鐵盒，其中長、寬、高恰有一項比原來的尺寸小，保證仍然能夠把這些製造誤失的木塊全部放入？(盒內的木塊的每條邊都必須與外盒的對應邊平行)(六分)

解：

不能保證。

以下為無法放入較小鐵盒的例子：
S 為 10000×1000×100 的鐵盒，
A 為 10000×1000×20 的木塊，
B 為 10000×800×80 的木塊，
C 為 10000×200×80 的木塊，
則 A，B，C 恰好可裝滿 S。
現取 a 為 10000×990×20 的木塊，
b 為 10000×800×75 的木塊，
c 為 9990×200×80 的木塊，
則找不到長、寬、高恰有一項比 S 小的鐵盒可放入 a，b，c。

評分標準：

01. 答案正確，不論理由是否正確，1/7 分
02. 說理可行，2/7 分（沒有量化處理，最多 2/7 分）
03. 舉例說明不能保證，7/7 分

6. 有分別寫上數 1，2，3，…，25 的紙牌各一張，甲、乙二人依下列規則玩遊戲。
(1) 由某人開始任選一張牌，另一人決定將此張牌分給誰；
(2) 從第二次開始，則由二人中所得到牌上的數之總和較大者先選牌(若二人總和相同，則由上次先選牌者繼續選牌)；
(3) 取完所有牌後，二人中所得到牌上的數的總和較大者勝。
如果由甲先選牌，是否能保證甲一定會贏？(六分)

解：

不行。甲先選牌之後，乙可以決定是否拿牌。如果有一個方法可以保證先拿牌必贏，則乙必決定先拿牌使甲輸掉遊戲。如果沒有方法可以保證先拿牌必贏，則乙可以讓甲先拿牌。故不能保證甲一定贏，而乙有方法可以一定贏。

7. 將 8×8 的方格表的小方格內依下列方式標記上數字：在左上角(1, 1)位置的小方格內標上 1，在它的右鄰(1, 2)位置及下鄰(2, 1)位置的小方格內分別標上 2，3；在下一行斜線 (1, 3)、(2, 2) 與(3, 1) 三個位置的小方格內分別標上 4，5 及 6，依此類推。每條斜線的小方格內標記數的順序是由右上的方格依序到左下的方格。在倒數第二條斜線 (7, 8)、(8, 7) 二個位置的小方格內標記的數是 62 及 63，在最末一條斜線(8, 8)位置的小方格內標記的數是 64。開始時小丁在這個方格表上放入 8 顆石子，使得每行每列都各只有一顆石子，然後他把每一顆石子朝比它原來位置標記的數大的方格移動。經過這樣的操作後，請問是否有可能仍然保持每行每列都各只有一顆石子？(八分)

解：

我們可以觀察到在同一條右上方格到左下方格的斜線上的方格，橫座標與直座標的和都是相同的，並且從左上角方格到右下角方格橫座標與直座標的和是依序遞增的。而因為小丁在這個方格表上放入 8 顆石子，使得每行每列都各只有一顆石子，所以每一顆石子的橫座標與直座標都不相同，故這八顆石子所在方格的全部橫座標與直座標的和為 2（1+2+3+4+5+6+7+8)。接著因為小丁把每一顆石子朝比它原來位置標記的數大的方格移動，所以每一顆石子不是沿著本身所在的右上到左下斜線方向移動，就是往自己右下方的斜線上的方格移動。但因為這八顆石子所在方格的全部橫座標與直座標的和固定為 2（1+2+3+4+5+6+7+8）不變，致使得每一顆石子只會在自己所在的右上到左下斜線移動，且只能往這條斜線的下方移動。當全部八顆石子都如此移動時，會導致第一行沒有對應的石子，因此答案是不可能。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》