注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2005 春季賽　國中組　初級卷　13/03/2005

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 小丁與小王每天都以固定的等速分別由 A、B 兩地相向而行(兩者之速度不必相同)。第一天他們在點 X 相遇；第二天小丁提早 30 分鐘出發，結果他們在點 Y 相遇，點 Y 在線段 XB 上且 XY 之長度爲 2 公里。請問若第三天小王提早 30 分鐘出發，他們在點 Z 相遇，請問 XZ 之長度爲多少公里？(三分)

解（一）：計算解法

假設小丁和小王第一天在相遇前分別走了 a 公里和 b 公里。因兩個人每天的速度都一樣，所以將接下來兩天所走的總路程一起考慮。第二天小丁比小王多走 30 分鐘，第三天小王比小丁多走 30 分鐘，所以兩天合計小丁和小王走的時間一樣多並且兩天總共各走了 2a 公里和 2b 公里。第二天小丁走了 a＋2 公里，因此第三天小丁只走 a－2 公里，也就是說 XZ 的長度是 2 公里。

解（二）：代數解法

設 AB 的距離為 a 公里，小丁的時速為每小時 $\boldsymbol{u}$ 公里，小王的時速為每小時 $\boldsymbol{v}$ 公里。

1°　第一天兩人同時出發。若經過 $\boldsymbol{t}$ 時後於點 $\boldsymbol{X}$ 相遇，則

$$\overline{AX} = ut\ ,\quad \overline{BX} = vt$$

由 $ut + vt = a$ 可得

$$t = \frac{a}{u+v}$$

故

$$\overline{AX} = \frac{au}{u+v}\ ,\quad \overline{BX} = \frac{av}{u+v} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

2°　第二天，小丁提早半小時出發，結果兩人在距 $\boldsymbol{X}$ 點 2 公里的 $\boldsymbol{Y}$ 點相遇。因此

「小丁由 $\boldsymbol{A}$ 走到 $\boldsymbol{Y}$ 的時間」＝「小王由 $\boldsymbol{B}$ 走到 $\boldsymbol{Y}$ 的時間」$+\frac{1}{2}$

即

$$\frac{\overline{AY}}{u} = \frac{\overline{BY}}{v} + \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(B)}$$

$$\frac{1}{u}\left(\frac{au}{u+y} + 2\right) = \frac{1}{v}\left(\frac{av}{u+y} - 2\right) + \frac{1}{2}$$

可得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(C)}$$

3° 第三天，小王比小丁提早半小時出發，結果兩人在 Z 點相遇。
同（B）式的想法可得

$$\frac{\overline{BZ}}{v}-\frac{\overline{AZ}}{u}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(D)}$$

$$\frac{1}{v}\left(\overline{BX}+\overline{XZ}\right)-\frac{1}{u}\left(\overline{AX}-\overline{XZ}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{v}\left(\frac{av}{u+v}+\overline{XZ}\right)-\frac{1}{u}\left(\frac{au}{u+v}-\overline{XZ}\right)=\frac{1}{2}$$

因 $t=\frac{a}{u+v}$，可知

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)\overline{XZ}=\frac{1}{2}$$

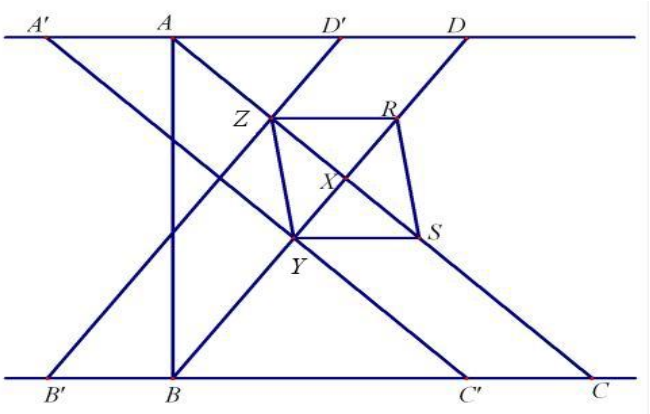
即

$$\overline{XZ}=2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(E)}$$

評分標準：

01. 寫出（A）式，1/7 分
02. 寫出（B）式，2/7 分
03. 證出（C）式，2/7 分
04. 寫出（D）式，1/7 分
05. 證出（E）式，1/7 分
06. 由「等速」觀念做出者只給 2/7 分。
07. 因「列式概念錯誤」導出「等速」者，不給分。

解（三）：幾何解法



在下圖裡，橫軸代表經過的時間而直軸代表 AB 間的距離。而線段 AC 和 BD 則可看成是小丁和小王分別從 A，B 兩地相向移動的運動，並於點 X 相遇。線段 $A'C'$ 是小丁提早半小時出發的運動（AA' 為半小時），並且和線段 BD 相交於 Y，即兩人第二天的相遇位置；線段 $B'D'$ 是小王提早半小時出發的運動（BB' 為半小時），並且和線段 AC 相交於 Z，即兩人第三天的相遇位置。分別從 Y，Z 兩點劃兩條平行於橫軸的線並分別交線段 AC 於 S，線段 BD 於 R。如此一來線段 ZR 與 YS 也分別代表半小時（因 $YSAA'$ 與 $ZRBB'$ 皆為平行四邊形），即 $ZR=YS$，所以可知 $YSRZ$ 也是平行四邊形且 X 到線段 ZR 的距離與到線段 YS 的距離相等。由題意可知 X 到線段 YS 的距離為 2 公里而我們需求出 X 到線段 ZR 的距離，因此答案為 2 公里。

2. 令 n 爲正整數。試證在 n 或 $3n$ 的十進制之各位數字中，至少會出現一個數字 1、2 或 9。(四分)

解（一）：

Case1：當 n 的首位為 1，2，9 時，本命題成立。
Case2：當 n 的首位為 3 時，3n 的首位為 9 或發生進位現象時為 1。
Case3：當 n 的首位為 4，5，6 時，3n 的首位為 1 或首位為 6 且發生進位現象時為 2。
Case4：當 n 的首位為 7，8，9 時，3n 的首位為 2。

評分標準：

01. 能分類處理（兩類以上），2/7 分。分類完整，4/7 分。
02. 討論 Case2 或 Case3 其中之一的進位狀況，1/7 分。兩者皆討論，3/7 分。

解（二）：

1° n 的尾數為 1，2，9 時，本命題成立。
2° n 的尾數為 3，4，7 時，則 3n 的尾數為 9，2 和 1，本命題成立。
3° n 的尾數為 5，6 時，n 的數字中有 1，2 和 9 時，本命題成立。
4° 若 n=35，45，55，65，75，85 時，n 的首位數字不是 1 就是 2，本命題依然成立。
5° 依此方式繼續討論下去即可得證本命題。

評分標準：

01. 說明至 2°，2/7 分
02. 5°討論不完整者，最多 4/7 分

解（三）：

1° n 中有為 1，2，9 時，本命題成立。
2° n 中沒有 1，2，9 時，則其數值必由 0，3，4，5，6，7，8 所組成。
此時有以下 2 方法可得本命題：

〈Way1〉

從 n 的首位數來觀察：
Case1：當 n 的首位為 3 時，3n 的首位為 9 或發生進位現象時為 1
Case2：當 n 的首位為 4 和 5 時，3n 的首位為 1
Case3：當 n 的首位為 6 時，3n 的首位為 1 或發生進位現象時為 2
Case4：當 n 的首位為 7，8 時，3n 的首位為 2。

〈Way2〉

因 n 中沒有 1，2 和 9，可設 $n=a\times10^k+b$，其中 a，b 是 0，3，4，5，6，7 或 8，且 $a\neq0$。
則 $3n=3a\times10^k+3b$，且 $0\leqq3b<27\times10^k$
此時 $9\times10^k\leqq3n<27\times10^k$
即 3n 的首位為 9 或 1 或 2，得證本命題。

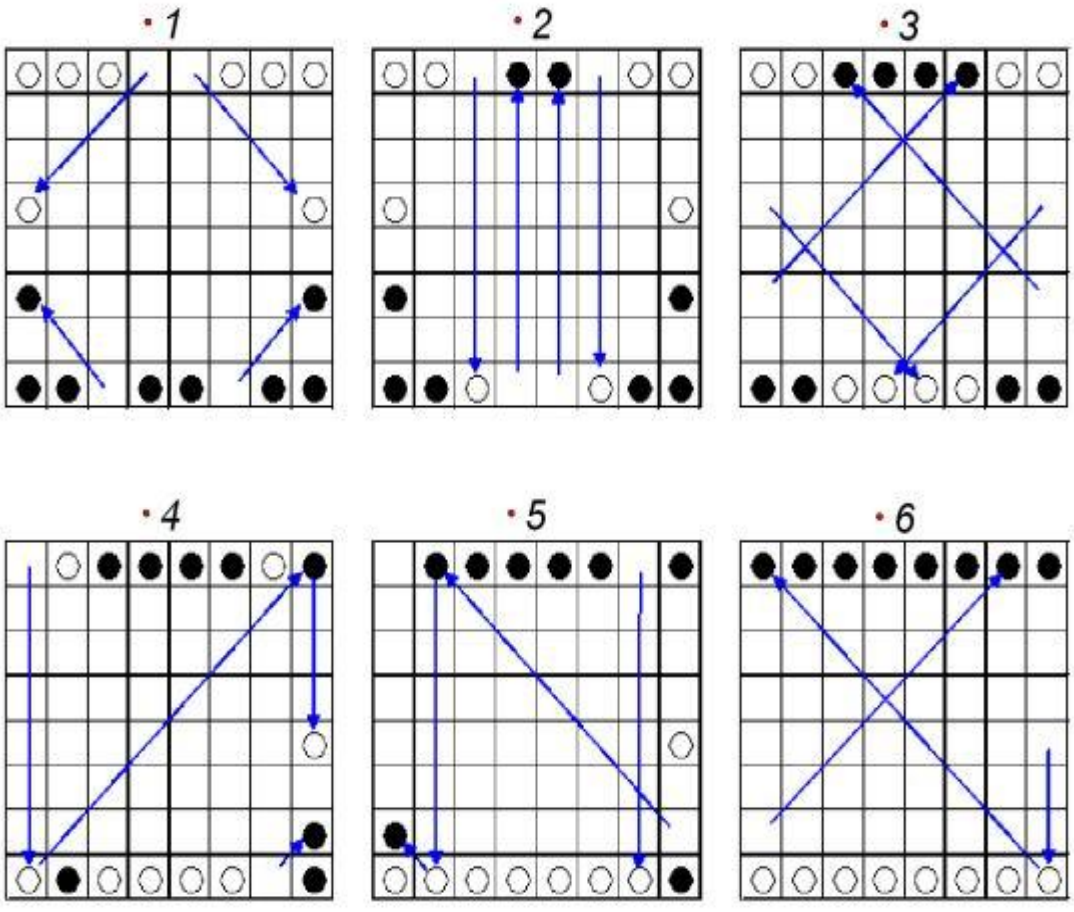
評分標準：

01. 說明至 2°，2/7 分。
02. Way1 討論不完整者，3/7 分；完整者，5/7 分。
03. Way2 說明完整者，5/7 分。

3. 在 8x8 的西洋棋盤的第一列的格子上有 8 個完全相同的黑色皇后；在最後一列上有 8 個完全相同的白色皇后，雙方輪流每次移動一個皇后。欲將黑色皇后及白色皇后互相交換位置，請問至少要移動多少次？(註：白色皇后和黑色皇后的移動規則是：在沒有阻擋下每次可朝水平、鉛直或對角線的某一個方向移動任意多格。每個格子上至多只能放置一個皇后。)(五分)

解：

下圖是移動 23 次就完成的方法：



接下來驗證 23 次為最少的次數。16 個皇后每個至少移動一次共 16 次。而中間每一列兩端的皇后最多只有 1 個皇后能移動一次就到對面，所以至少有 6 個皇后需要移動二次以上。在角落上的 4 個皇后中，最多有 3 個皇后可以一次到對面，因此至少 1 個皇后需要移動二次。故最少需 16+6+1＝23 次。

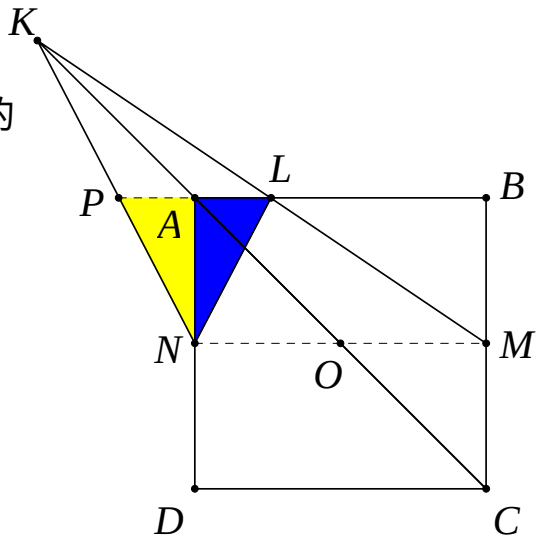
4. 在正方形 $ABCD$ 中，點 M，N 分別爲 BC 邊及 AD 邊的中點。在對角線 CA 靠近點 A 的延長線上取一點 K(點 K 在正方形外部)。連接線段 KM 交 AB 邊於點 L。試證 $\angle KNA=\angle LNA$。(五分)

解：

如圖，延長 BA 與 KN 交於 P 點。

若證出 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 全等，

即可證出 $\angle LNA=\angle KNA$。



1° 連 MN 與 AC 交於 O，則 O 點是正方形 $ABCD$ 的對稱中心，即

$\overline{OM}=\overline{ON}$ （$\overline{KO}$ 為 $\triangle KMN$ 之中線）

2° 因 $LP//MN$，由 $\frac{\overline{AP}}{\overline{ON}}=\frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{OM}}$

可得

$\frac{\overline{AP}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{ON}}{\overline{OM}}=1$ 即 $\overline{AP}=\overline{AL}$

3° 在 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 中，

$\overline{NA}\perp\overline{LP}$

$\overline{AP}=\overline{AL}$

$\overline{AN}=\overline{AN}$

可得 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 全等

即 $\angle LNA=\angle KNA$。

評分標準：

01. 說明 $\overline{OM}=\overline{ON}$，1/7 分

02. 證明 $\overline{AP}=\overline{AL}$，5/7 分

03. 說明 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 全等，即 $\angle LNA=\angle KNA$，1/7 分

5. 一個非常大的城市，它的所有街道都是東西向或是南北向(如棋盤式)。小朱從此城市的點 P 車頭朝北開始駕車，最後回到點 P 車頭仍然朝北。在路程中除了開始及最後各經過點 P 一次外，其他任何地點都沒有通過兩次或兩次以上。若路程中小朱共作了 100 次左轉，請問他至少必須右轉幾次？(五分)

解：

由題意可將車子所行經的路徑視為一個封閉且本身不相交的曲線。因為車頭方向不變且回到 P 點，故可將車子看成是以順時鐘方向或逆時鐘方向旋轉 360°。若是以逆時鐘方向旋轉，則右轉次數比左轉次數少 4 次，即 96 次；若是以順時鐘方向旋轉，則右轉次數比左轉次數多 4 次，即 104 次。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》