注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2005 春季賽　高中組　高級卷　20/03/2005

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 點 A、B 爲整係數多項式函數的圖形上的相異兩點。若點 A、B 的兩個座標都是整數，且線段 AB 的長也是整數，試證直線 AB 平行於 x 軸。 (四分)

解：

1° 設 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 為整係數多項函數 $y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$a_i\in Z$，$i=0,1,2,\cdots,n$，圖形上相異的兩點。

由此假設可得 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(f(x_1)-f(x_2))^2}$

2° 因 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1,x_2,x_1$ 均為整數可知

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=a_n\left(x_1^n-x_2^n\right)+a_{n-1}\left(x_1^{n-1}-x_2^{n-1}\right)+\cdots+a_1\left(x_1-x_2\right)\\&=(x_1-x_2)(a_n\left(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_2+\cdots+x_1x_2^{n-2}+x_2^{n-1}\right)+\\&\qquad a_{n-1}\left(x_1^{n-2}+x_1^{n-3}x_2+\cdots+x_1x_2^{n-3}+x_2^{n-2}\right)+\cdots+a_2(x_1+x_2)+a_1)\\&=(x_1-x_2)K,\quad K\in Z\end{aligned}$$

3° 因此 $\overline{AB}=|x_1-x_2|\sqrt{1+K^2}$。由題意可知 $1+K^2$ 為一整數 H 的平方。

4° 若 $1+K^2=H^2$，則可得 $K=0$，$H=1$。

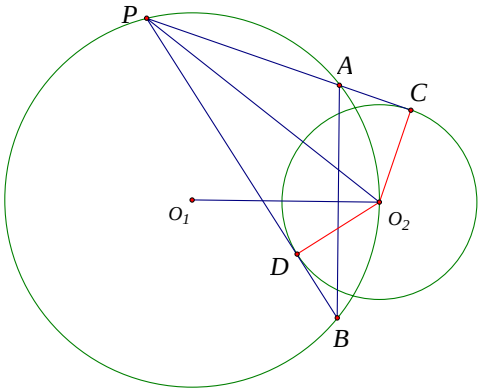
5° 故 $f(x_1)-f(x_2)=0$，即 $y_1=f(x_1)=f(x_2)=y_2$，由此知直線 AB 平行於 x 軸。

評分標準：

01. 寫出 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(f(x_1)-f(x_2))^2}$，1/7 分
02. 驗證 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)K$，$K\in Z$，1/7 分
03. 證出 $\overline{AB}=|x_1-x_2|\sqrt{1+K^2}$，3/7 分
04. 說明 $K=0$，1/7 分
05. 說明直線 AB 平行於 x 軸，1/7 分

2. 設圓 C_1 與圓 C_2 之圓心分別爲點 O_1 與 O_2，通過圓 C_1 上一點 P 向圓 C_2 所作的二條切線分別再交圓 C_1 於點 A 及點 B。若 O_2 在圓 C_1 上，試證直線 AB 與直線 O_1O_2 互相垂直。 (五分)

解：



1° 直線 PC 與直線 PD 切圓 C_2 於 C，D，
故 $\angle DPO_2=\angle CPO_2$。
因此對圓 C_1 而言，$\angle BPO_2=\angle APO_2$，
即　$\angle AO_1O_2=\angle BO_1O_2$
故　弧 AO_2＝弧 O_2B，
可得 線段 AO_2＝線段 BO_2

2° 因線段 AO_1＝線段 BO_1 且線段 AO_2＝線段 BO_2，所以◇AO_1BO_2 為鳶形，也因此直線 AB

與直線 O_1O_2 互相垂直。

評分標準：

01. 驗證線段 AO_2＝線段 BO_2，5/7 分
02. 說明◇AO_1BO_2 為鳶形而得到直線 AB 與直線 O_1O_2 互相垂直，2/7 分
03. 只寫出線段 AO_1＝線段 BO_1，1/7 分
04. 未驗證線段 AO_2＝線段 BO_2 而直接說◇AO_1BO_2 為鳶形所以直線 AB 與直線 O_1O_2 互相垂直，2/7 分

3. 有分別寫上數 1，2，3，…，25 的紙牌各一張，甲、乙二人依下列規則玩遊戲：
   (1) 由某人開始任選一張牌，另一人決定將此張牌分給誰；
   (2) 從第二次開始，則由二人中所得到牌上的數之總和較大者先選牌(若二人總和相同，則由上次先選牌者繼續選牌)；
   (3) 取完所有牌後，二人中所得到牌上的數的總和較大者勝。

   如果由甲先選牌，是否能保證甲一定會贏？ (五分)

解：

不行。甲先選牌之後，乙可以決定是否拿牌。如果有一個方法可以保證先拿牌必贏，則乙必決定先拿牌使甲輸掉遊戲。如果沒有方法可以保證先拿牌必贏，則乙可以讓甲先拿牌。故不能保證甲一定贏，而乙可以保證一定贏。

4. 對於任意正整數 m，定義 $f^1(x)=f(x)$ 且 $f^m(x)=f(f^{m-1}(x))$。請問是否存在一個二次多項式 $f(x)$，對於任意正整數 n，使得方程式 $f^n(x)=0$ 恰好有 2^n 個兩兩相異的實根？ (六分)

解：

存在。

取 $f(x)=x^2-2$。當 $f(x)=0$，可得 $x=\pm\sqrt{2}$。驗證對於每一個 $f^{n+1}(x)=0$ 的根都是 $r_{n+1}=\pm\sqrt{2\pm r_n}$ 的型態，其中 r_n 為 $f^n(x)=0$ 的根。事實上，

$$f^{n+1}(r_{n+1})=f^n\left(\left(\pm\sqrt{2\pm r_n}\right)^2-2\right)=f^n(\pm r_n)=0,$$

所以 r_{n+1} 為 $f^{n+1}(x)=0$ 的根。又因為 $f^{n+1}(x)=0$ 根的數目為 $f^n(x)=0$ 根的數目的兩倍，因此 r_{n+1} 就是 $f^{n+1}(x)=0$ 全部的根。

接下來我們將用數學歸納法來求證對所有的 n 而言，$\pm r_n$ 都是實數以及 $|r_n|<2$。

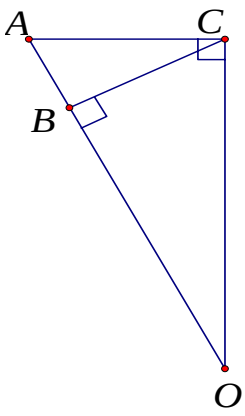
當 $n=1$ 時，$r_1=\pm\sqrt{2}$ 命題成立。

假設 $n\geq 1$ 時命題成立，即 $|r_n|<2$，可知 $2\pm r_n>0$。故 $r_{n+1}=\pm\sqrt{2\pm r_n}$ 為實數。而因 $|2\pm r_n|\leq 2+|r_n|<4$，所以 $|r_{n+1}|<2$。由此可知命題成立。

因 $\pm\sqrt{2}$ 為相異兩數，故可再由數學歸納法來證得 $f^n(x)=0$ 有 2^n 個兩兩相異的實根。

5. 一個正二十面體及一個正十二面體的內切球半徑相等，試證它們的外接球半徑也相等。(註：一個正二十面體有 20 個正三角形的面，每個頂點有 5 個面在此交會，交於同一個稜的任意二個面的交角都相等；一個正十二面體有 12 個正五邊形的面，每個頂點有 3 個面在此交會，交於同一個稜的任意二個面的交角都相等。) (七分)

解：

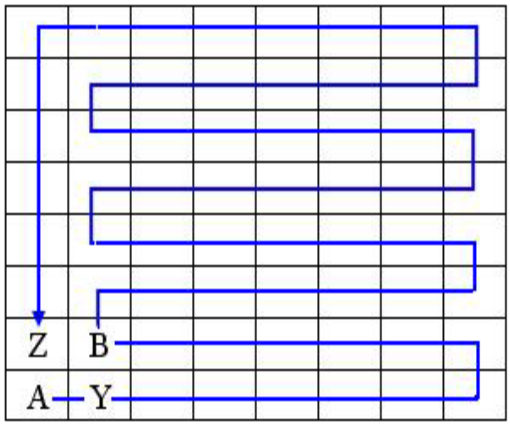


設 O 為正二十面體的外接球心，C 是其中一面正三角形 T 的中心以及 A 是 T 的一個頂點。則這一個正二十面體的外接球半徑為 OA 以及內切球的半徑為 OC。現在將此正二十面體上所有相鄰的正三角形的中心連接而得到一個對偶的正十二面體，則 C 是這個正十二面體其中一個頂點且有三個面在此交會，而這三個面中有一個面的中心 B 會落在 OA 上。右圖為，A，B，C，O 之間位置的示意圖。而此正十二面體的外接球半徑是 OC 以及內切球半徑為 OB。

觀察△OCA 和△OBC，因 OC 皆為這兩三角形的鄰邊，∠COB＝∠AOC 及∠OCA＝90°＝∠OBC，所以這兩個三角形為相似三角形，可得 $\frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OC}$，也就是正二十面體和正十二面體的外接球半徑與內切球半徑的比相同。因此當正二十面體和正十二面體的內切球半徑相同時，外接球半徑也相同。

6. 在 8×8 的方格表內放置一個棋子，這個棋子每次只可以朝水平或鉛直方向走一格到鄰近的小方格，且每個小方格只能通過一次，當它走過此方格表上所有小方格時，我們稱之爲它走一條完整路徑。設 A 是此方格表左下角的小方格，B 此方格表左下角 2×2 區域的右上角位置的一個小方格。試證這個棋子由 A 出發所能走的完整路徑的數目要比由 B 出發所能走的完整路徑的數目多。 (註：A 在(8, 8)位置，B 在(7, 7)位置。) (七分)

解：



除了 A 和 B，我們在左下角 2×2 的區域中再標出 Y 和 Z，如右圖所示。而右圖為一個從 A 到 Z 的完整路徑。我們可以觀察到若是將此方格表看成西洋棋盤的一部份，則 A 和 B 是顏色相同的兩格而且兩種顏色的格子一樣多，而如題意的移動規則，每移動一次棋子所在位置的方格顏色就會交換，因此不存在一個路徑可以從 A 開始在 B 結束或是從 B 開始在 A 結束。

對於從 B 開始的完整路徑而言，因為不可能在 A 結束，所以走到 A 的時候必定介於 Y 和 Z 的中間。

假設有一從 B 開始的完整路徑棋子是先走到 Y，則這個路徑可得到一個相對應從 A 開始的完整路徑：

先從 A 走到 Y，再逆著原本從 B 走到 Y 的方式走到 B，然後再移動到 Z，接著依照原本從 B 開始的完整路徑走到 Z 之後的方式走完。

同樣的方法，如果有一從 B 開始的完整路徑棋子是先走到 Z，則這個路徑一樣可找到一個相對應從 A 開始的完整路徑：

先從 A 走到 Z，再逆著原本從 B 走到 Z 的方式走到 B，然後再移動到 Y，接著依照原本從 B 開始的完整路徑走到 Y 之後的方式走完。

由以上的討論可知從 B 開始的完整路徑數目不會多於從 A 開始的完整路徑。而利用以上方法找出的從 A 開始的完整路徑是跟從 B 開始的完整路徑有著相同的終點，但上圖這一個從 A 開始的完整路徑是在 Z 結束，但是我們卻找不到一個用上述方法相對應的從 B 開始的完整路徑而且是在 Z 結束的。因此由 A 出發所能走的完整路徑的數目要比由 B 出發所能走的完整路徑的數目多。

7. 在空間中有 200 個相異點，任二點都有線段相連，且任二條線段互不相交或只相交於端點。小田在每條線段都塗上一種顏色，總共塗了 k 種顏色。小英欲將這 200 個點也都各塗上這 k 種顏色中的一種，使得每一條線段的兩個端點所塗的顏色至少有一個與此線段所塗的顏色不同，無論小田如何塗色，

(1) k=7； (四分)

(2) k=10(四分)

請討論小英是否保證能達成目的？

解：

（1） 不能保證。

我們先忽略其中 72 個點以及這些點跟剩下 128 個點所連接的線段。

a.將這 128 個點分成 64 對，將每一對的兩點連接並將連接線段塗上紅色。

b.再將這 64 對分成 32 組，每組兩對 4 點。在每一組裡，將在不同對裡的點所連成的線段塗成藍色。

c.將這 32 組兩兩一組分成 16 堆，每堆兩組 8 點。再將每堆裡不同組的點所連接而成的線段塗上黃色。

d.繼續將這 16 堆分成 8 類，每類兩堆 16 點。每類裡不同堆的點連接所形成的線段塗上綠色。

e.將這 8 類分成 4 群, 每群兩類 32 點. 將每群裡不同類的點所連接形成的線段塗上橘色.

f.最後再將這 4 個群分成兩個集合，每個集合 2 群 64 點。把每個集合裡不同群的點所連接形成的線段塗上紫色。

g.將不同集合間的點所連接而成的線段塗上黑色。

如此一來，共塗了 7 種顏色且小英沒辦法在每一個集合裡都有黑點，所以有一個集合沒有黑色點。現在觀察這一個沒有黑色點的集合，小英也沒辦法在每個群裡都有紫色點，因此有一個群沒有紫色點。再來觀察這一個沒紫色點的群，同理，會有一類沒有橘色點。接下來看沒有橘色點的這一類，同理，會有一堆沒有綠色點。繼續觀察沒有綠色點的這一堆，會有一組沒有黃色點。再來看沒有黃色點這一組，會有一對沒有藍色點；而這一對，由以上的討論可知不會有黑色，紫色，橘色，綠色，黃色以及藍色，因此這一對裡的兩個點都是紅色且連接的是紅線。所以此種分法小英無法達到她的目的，故無法保證。

（2）不能保證。

這次只要考慮 121 個點即可。我們考慮一個在模 11 之下的有限幾何空間。給予每一個點一個座標（i , j），其中 i 和都是介於 0 到 10 的正數。如果兩點的橫座標相同，則連接的線段是垂直線；如果縱座標相同，則連接的線段就是水平線。如此一來，除了水平線或垂直線外，每點的連線線段的斜率 m 都是介於 1 到 10 的整數。相同斜率 m 的線段塗上相同的顏色，不同的 m 有不同的顏色，而為了方便起見，把斜率 m 時塗上的顏色稱做 m 色。現在小英要把 121 個點塗上 10 個顏色，由鴿籠原理可知，一定有一個顏色至少有 13 個點，假設這個顏色為 m 色。而在這個我們所考慮的幾何空間裡，斜率 m 的線會有 11 條且剛好經過 11 個點。再次根據鴿籠原理，這 13 個 m 色的點裡至少會有 2 個點是在同一條斜率 m 的線上，這樣我們就得到了一條塗了 m 色的線段是由 2 個 m 色的點連接的。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》