注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2005 春季賽　高中組　初級卷　13/03/2005

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有四個形如 $f(x)=x^2+ax+b$ 的一元二次函數，其中 a、b 爲實數，將這四個函數的圖形繪在座標平面上。已知沒有三個或三個以上的圖形共同交於一點，且所有這些圖形的交點共有 4 個。試證這 4 個交點的橫坐標中最大值與最小值之和等於其它二個橫坐標之和。(三分)

解：

1°　設 $\begin{matrix} y=x^2+Ax+B \\ y=x^2+ax+b \end{matrix}$ 為兩拋物線

若 $A\neq a$，則兩拋物線交點的橫座標為

$$x^2+Ax+B=x^2+ax+b$$
$$x=\frac{b-B}{A-a}$$

由此可知，若 $A\neq a$ 則兩拋物線恰有一交點

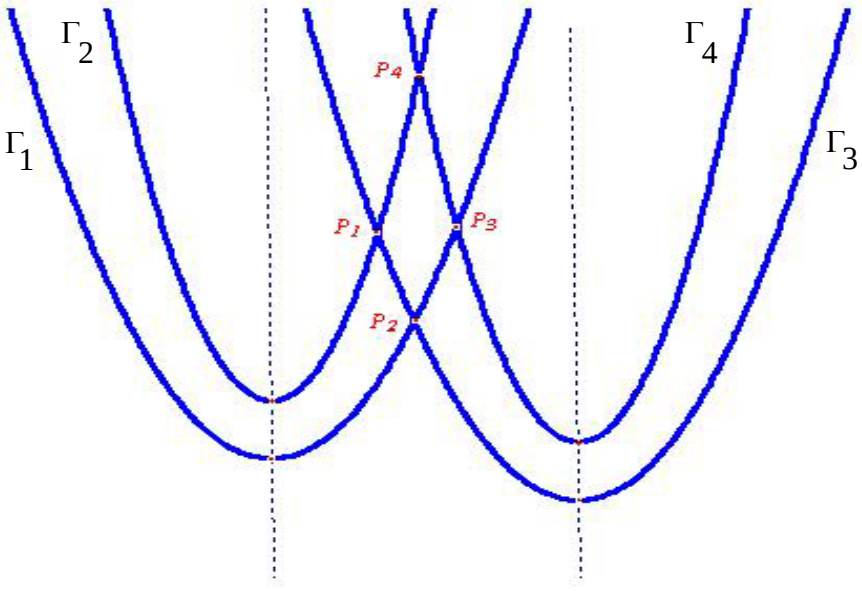
2°　設 $\Gamma_i: y=x^2+a_ix+b_i, i=1,2,3,4$ 為四拋物線且 $a_1\le a_2\le a_3\le a_4$。

若 a_i 全不相同，則會有 $C_2^4=6$ 個交點。

因此，若欲使此四拋物線恰有四個交點必須 $a_1=a_2<a_3=a_4$。

不妨設 $b_1<b_2$，$b_3<b_4$。

如下圖：



3° 不失一般性的假設Γ_2與Γ_3的交點，Γ_1與Γ_4的交點的橫座標為四個交點的橫座標中的最小與最大值以x_1，x_4表示，而Γ_1與Γ_3的交點，Γ_2與Γ_4的交點的橫座標分別以x_2，x_3表示。這樣有以下關係式：

$$x_1 < x_2 < x_4$$
$$x_1 < x_3 < x_4$$

此時

$$x_1 = \frac{b_3 - b_2}{a_1 - a_3} \qquad x_4 = \frac{b_4 - b_1}{a_1 - a_3}$$
$$x_2 = \frac{b_3 - b_1}{a_1 - a_3} \qquad x_3 = \frac{b_4 - b_2}{a_1 - a_3}$$

或

$$x_1 = \frac{b_3 - b_2}{a_1 - a_3} \qquad x_4 = \frac{b_4 - b_1}{a_1 - a_3}$$
$$x_2 = \frac{b_4 - b_2}{a_1 - a_3} \qquad x_3 = \frac{b_3 - b_1}{a_1 - a_3}$$

即可算出

$$x_1 + x_4 = \frac{b_3 + b_4 - b_1 - b_2}{a_1 - a_3} = x_2 + x_3$$

評分標準：

01. 僅畫出四個交點的示意圖，1/7 分
02. 說明若 $A \neq a$，則兩拋物線交點的橫座標為 $x = \frac{b - B}{A - a}$，1/7 分
03. 再由 02.得到若 $A \neq a$ 則兩拋物線恰有一交點，1/7 分
04. 說明$a_1 = a_2 < a_3 = a_4$與假設$b_1 < b_2$，$b_3 < b_4$，1/7 分
05. 畫出正確圖形，1/7 分
06. 得到x_i與a_i, b_i間的關係式，1/7 分
07. 驗證$x_1 + x_4 = x_2 + x_3$，1/7 分

2. 將所有十進制的正整數依序寫在一條無限長的紙帶上：12345678910111213⋯(中間無間斷)，然後將紙帶依每 7 個數字長剪成小段紙片，例如 1234567，8910111，2131415，16.....。令 a 爲任意一個七位數的正整數，試證：
(1) 至少有一張小紙片上出現的數爲 a；(三分)
(2) 有無限多張小紙片上出現的數都爲 a。(一分)

解：

（1）考慮以下 7 個連續的八位數：
$10a, 10a+1, 10a+2, 10a+3, 10a+4, 10a+5, 10a+6.$
當我們按題意將這 7 個數依序寫在紙帶上並以 7 個數字為一組剪開時，由於 7 和 8 互質，無論從何處開始剪開都必有一段紙片出現 a。

(2) 同理，當我們考慮 $100a, 100a+1, 100a+2, 100a+3, 100a+4, 100a+5, 100a+6$ 這 7 個連續的九位數，$1000a, 1000a+1, 1000a+2, 1000a+3, 1000a+4, 1000a+5, 1000a+6$ 這 7 個連續的十位數，以及所有 7 個同樣型態連續的 n 位數（n 和 7 互質）時，以（1）的方法都至少可以得到一張寫著 a 的紙片，因此有無限多張小紙片上出現的數都為 a。

3. 在正方形 $ABCD$ 中，點 M，N 分別爲 BC 邊及 AD 邊的中點。在對角線 CA 靠近點 A 的延長線上取一點 K(點 K 在正方形外部)。連接線段 KM 交 AB 邊於點 L。試證 $\angle KNA=\angle LNA$。(四分)

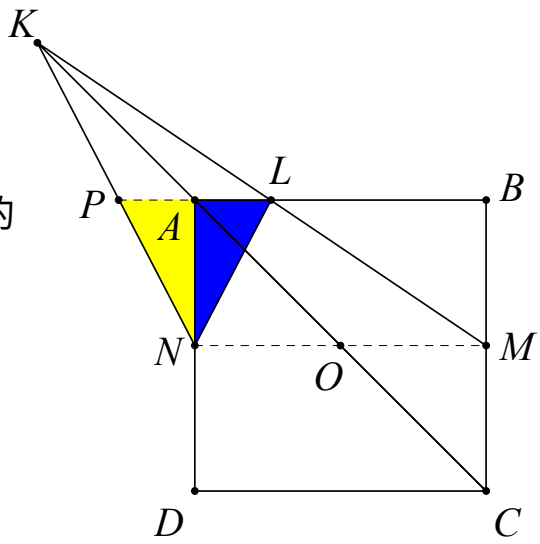
解：

如圖。

延長 BA 與 KN 交於 P 點。

若證出 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 全等，

即可證出 $\angle LNA=\angle KNA$。



1° 連 MN 與 AC 交於 O，則 O 點是正方形 $ABCD$ 的對稱中心，即

$$\overline{OM}=\overline{ON} \quad (\overline{KO} \text{ 為} \triangle KMN \text{ 之中線})$$

2° 因 $LP//MN$，由 $\frac{\overline{AP}}{\overline{ON}}=\frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{OM}}$

可得

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{ON}}{\overline{OM}}=1 \quad \text{即} \quad \overline{AP}=\overline{AL}$$

3° 在 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 中，

$$\overline{NA}\perp\overline{LP}$$
$$\overline{AP}=\overline{AL}$$
$$\overline{AN}=\overline{AN}$$

可得 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 全等

即 $\angle LNA=\angle KNA$。

評分標準：

01. 說明 $\overline{OM}=\overline{ON}$，1/7 分
02. 證明 $\overline{AP}=\overline{AL}$，5/7 分
03. 說明 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 全等，即 $\angle LNA=\angle KNA$，1/7 分

4. 一個非常大的城市，它的所有街道都是東西向或是南北向(如棋盤式)。小朱從此城市的點 P 車頭朝北開始駕車，最後回到點 P 車頭仍然朝北。在路程中除了開始及最後各經過點 P 一次外，其他任何地點都沒有通過兩次或兩次以上。若路程中小朱共作了 100 次左轉，請問他至少必須右轉幾次？(四分)

解：

由題意可將車子所行經的路徑視為一個封閉且本身不相交的曲線。因為車頭方向不變且回到 P 點, 故可將車子看成是以順時鐘方向或逆時鐘方向旋轉 360°。若是以逆時鐘方向旋轉，則右轉次數比左轉次數少 4 次，即 96 次；若是以順時鐘方向旋轉，則右轉次數比左轉次數多 4 次，即 104 次。

5. 已知若干個正實數的和等於 10，它們的平方和大於 20。試證它們的立方和大於 40。(五分)

解：

由柯西不等式

$$\left(\sqrt{a_1}^2+\sqrt{a_2}^2+\cdots+\sqrt{a_n}^2\right)\left(\sqrt{a_1^3}^2+\sqrt{a_2^3}^2+\cdots+\sqrt{a_n^3}^2\right)$$
$$\geq\left(\sqrt{a_1}\sqrt{a_1^3}+\sqrt{a_2}\sqrt{a_2^3}+\cdots\sqrt{a_n}\sqrt{a_n^3}\right)^2$$
$$=\left(a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2\right)^2$$

即

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3\right)\geq\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2$$

又因

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=10$$
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>20$$

所以

$$10(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3)>20^2=400$$

即

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3>40$$

評分標準：

01. 知道柯西不等式，2/7 分

02. 驗證 $\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3\right)\geq\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2$，3/7 分

03. 說明 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3>40$，2/7 分

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》